La fonction exponentielle

Il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ => **fontion exponentielle** $\exp : \mathbb{R} \to]0;+\infty[$

$$\exp : x \to \exp(x) = e^x$$

La fonction exponentielle est **définie, continue** et **dérivable sur** $\mathbb{R}$

$$(e^x)' = e^x \qquad e^0 = 1 \qquad e^1 = e \qquad (e^{u(x)})' = u' e^{u(x)}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
donc e^x **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

Propriétés

$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$ $\qquad$ $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$e^{a+b} = e^a . e^b$ $\qquad$ $e^{na} = (e^a)^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$ $\qquad$ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

Limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

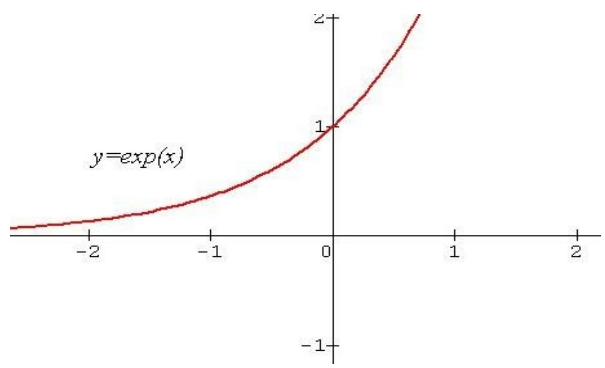
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ $\qquad$ $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

e^x l'emporte sur x en l'infini

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	0 ↗	1	$+\infty$

Courbe de la fonction e^x



Méthode pour déterminer la limite de $\lim\limits_{x \to \bullet} e^{u(x)}$

1. $\lim\limits_{x \to \bullet} u(x) = \blacksquare$

2. $\lim\limits_{x \to \blacksquare} e^{x} = \blacktriangle$

3. par composition, $\lim\limits_{x \to \bullet} e^{u(x)} = \blacktriangle$

$\bullet$, $\blacksquare$, $\blacktriangle$ remplacent $a \in \mathbb{R}$, $-\infty$, $+\infty$