Droites & Systèmes

A) Les droites du plan

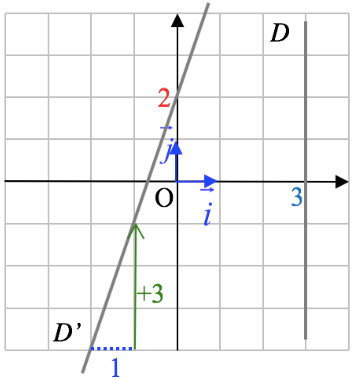
1) Équations réduites de droites

Définition : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

- L'équation réduite d'une droite verticale est : $(d): x=k$
- L'équation réduite d'une droite horizontale est : $(d): y=k$
- L'équation réduite d'une droite oblique est : $(d): y=mx+p$
  - le nombre m s'appelle : coefficient-directeur ou pente de (d)
  - le nombre p s'appelle : ordonnée à l'origine de (d)

<u>Exemple</u> : on donne le graphique suivant

- la droite (D) a pour équation réduite $x = 3$
- la droite (D') a pour équation réduite $y = 3x+2$



Propriété : Soient les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ avec $x_A \neq x_B$; alors :

- le coefficient-directeur de la droite (AB) est donné par $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
- l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est donnée par $p=y_A-m\times x_A$ ou $p=y_B-m\times x_B$

Méthode : *Comment tracer une droite à l'aide de son équation réduite ?*
Vidéo : https://youtu.be/cUdhxkaTqqk

- Avec une droite verticale (d_1) d'équation $x=2$
  - on choisit 2 points d'abscisse 2, $A(2;-1)$ et $B(2;4)$
- Avec une droite horizontale (d_2) d'équation $y=-3$
  - on choisit 2 points d'ordonnée -3 , $A(1;-3)$ et $B(0;-3)$
- Avec une droite oblique (d_3) d'équation $y=2x+3$
  - on choisit 2 valeurs de x : $x=-1$ et $x=2$
  - on calcule les valeurs de y associées : $y=1$ et $y=7$
  - on obtient 2 points $A(-1;1)$ et $B(2;7)$

2) Vecteur-directeur d'une droite

Définition : Soit (d) une droite du plan ; on dit que $\vec{u}$ est un vecteur-directeur de (d) si $\vec{u}$ possède la même direction que la droite (d)

Méthode : *Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite*
Vidéo : https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

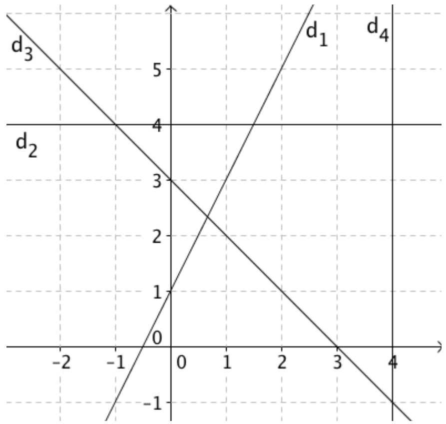
On donne le graphique ci-contre :

un vecteur-directeur de (d_1) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

un vecteur-directeur de (d_2) est $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

un vecteur-directeur de (d_3) est $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

un vecteur-directeur de (d_4) est $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$



3) Équations cartésiennes de droites

Théorème & Définition : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$; une équation cartésienne de toute droite (d) du plan est : $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$

→ ***Démonstration au programme*** : **Vidéo** https://youtu.be/GVDUrdsRUdA

<u>*exemples*</u> :

- $(d):-2x+5y+1=0$ est une équation cartésienne de (d)
- $(d'):5y+1=0$ est une équation cartésienne de (d')
- $(d''):-2x+1=0$ est une équation cartésienne de (d'')

Méthode : *Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur*

- **Vidéo** https://youtu.be/rLxQIbQkPsQ
- **Vidéo** https://youtu.be/NosYmlLLFB4
- **Vidéo** https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$

solutions :

a) Soit un point $M(x;y)$ de la droite (d)

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires, donc $det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

donc $\begin{vmatrix}x-3 & -1\\y-1 & 5\end{vmatrix}=0$ donc $5(x-3)-(-1)(y-1)=0$ donc $5x-15+y-1=0$

donc une équation cartésienne de (d) est : $5x+y-16=0$

b) Soit un point $M(x;y)$ de la droite (d')

On a $B\in(d')$ et $C\in(d')$ donc $\overrightarrow{BC}$ est directeur de (d')

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-5\\y-3\end{pmatrix}$ sont colinéaires,

donc $det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})=0$ donc $\begin{vmatrix}x-5 & -4\\y-3 & -6\end{vmatrix}=0$

donc $-6(x-5)-(-4)(y-3)=0$ donc $-6x+30+4y-12=0$

donc une équation cartésienne de (d') est : $-6x+4y+18=0$

après simplification, on déduit que : $(d'):3x-2y-9=0$

rque : on essaie à chaque fois de simplifier les valeurs de a, b, c dans toute équation cartésienne $ax+by+c=0$

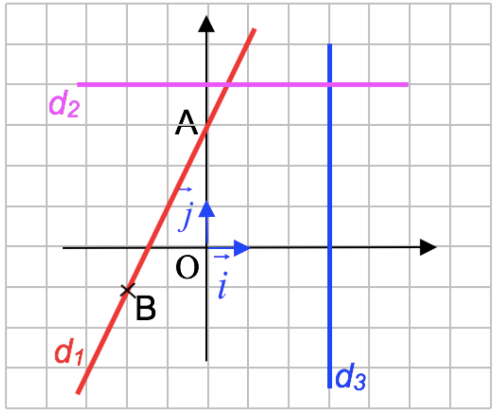
Méthode **:** *Tracer une droite dans un repère*

Vidéo **https://youtu.be/EchUv2cGtzo**

rque : il est possible de passer d'une équation réduite à une équation cartésienne (ou l'inverse)

- si $(d)\ y=2x-3$ alors $(d):-2x+y+3=0$
- si $(d'):5x-2y+3=0$ alors $(d'):y=2{,}5x+1{,}5$
- si $(d''):y=-5$ alors $(d''):y+5=0$
- si $(d'''):-3x+6=0$ alors $(d'''):x=2$

exercice : déterminer les équations cartésiennes des droites $(d_1),(d_2),(d_3)$



la droite (d_2) est horizontale donc son équation réduite est $y=4$ ainsi son équation cartésienne est $(d_2):y-4=0$

la droite (d_3) est verticale donc son équation réduite est $x=3$ ainsi son équation cartésienne est $(d_3):x-3=0$

la droite (d_1) est oblique donc on applique la méthode précédente (d_1) passe par $A(0;3)$ et est dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ donc son équation réduite est $y=2x+3$ ainsi son équation cartésienne est $(d_1):-2x+y-3=0$

4) Positions relatives de 2 droites

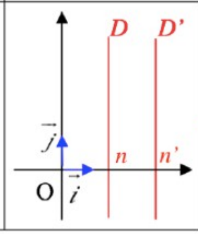
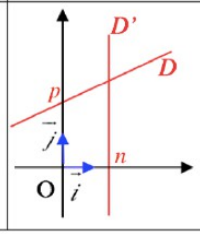
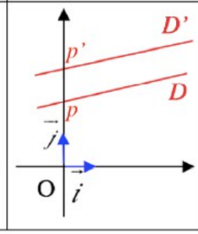
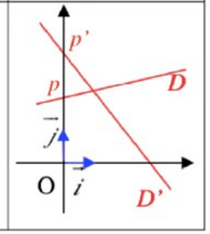
a) avec une équation réduite

Propriété : Soient 2 droites du Plan $(d):y=mx+p$ et $(d'):y=m'x+p'$

- si $m=m'$ et $p\neq p'$ alors (d) et (d') sont parallèles strictes
- si $m=m'$ et $p=p'$ alors (d) et (d') sont parallèles confondues
- si $m\neq m'$ alors (d) et (d') sont sécantes

exemples : les droites $(d_1):y=2x-3$ et $(d_2):y=0{,}5x+1$ sont sécantes
les droites $(d_3):y=4x$ et $(d_4):2x-0{,}5y+1=0$ sont parallèles

Tableau récapitulatif :

<table>
<tr><td>Equation de D
Equation de D'</td><td>$x=n$
$x=n'$</td><td>$y=mx+p$
$x=n$</td><td colspan="2">$y=mx+p$
$y=m'x+p'$</td></tr>
<tr><td>Position de D et D'</td><td>D // D'</td><td>D et D' sont sécantes</td><td>Si $m=m'$
D // D'</td><td>Si $m\neq m'$
D et D' sont sécantes</td></tr>
<tr><td>Représentation</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

b) avec une équation cartésienne

Propriété : Soient 2 droites du Plan $(d): ax+by+c=0$ et $(d'): a'x+b'y+c'=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$ et $(a',b')\neq(0,0)$

- Si $a'b-ab'=0$ alors (d) et (d') sont parallèles
- Si $a'b-ab'\neq 0$ alors (d) et (d') sont sécantes

Méthode : *Démontrer que deux droites sont parallèles*
Vidéo : **https://youtu.be/NjsVdVolhvU**

énoncé **:** Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $6x-10y-5=0$ et $-9x+15y=0$ sont parallèles.

Solution : le vecteur $\vec{u}_1\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$ dirige (d_1) et le vecteur $\vec{u}_2\begin{pmatrix}15\\9\end{pmatrix}$ dirige (d_2)

ainsi $det(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=\begin{vmatrix}10 & 15\\ 6 & 9\end{vmatrix}=10\times 9-6\times 15=0$ donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles

5) Distance d'un point à une droite

Propriété : Soit $(d): ax+by+c=0$ une droite du Plan et $A(x_A ; y_A)\notin(d)$

alors la distance du point A à la droite (d) est : $\delta=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

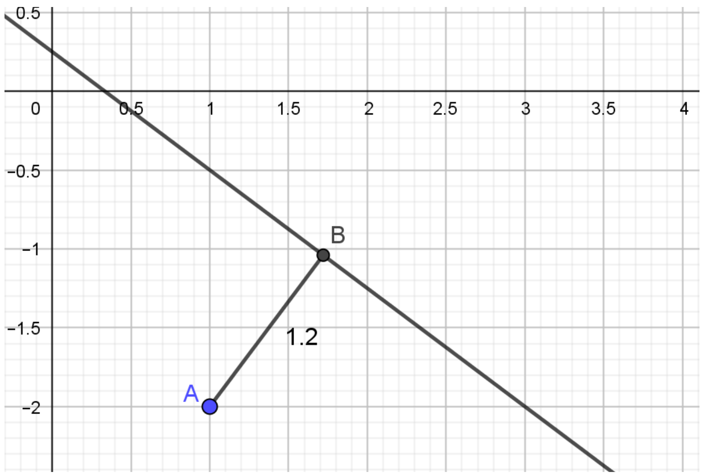
exemple :
Soit
$(d): 3x+4y-1=0$
et $A(1;-2)$;

on vérifie que $A\notin(d)$

la distance du point A à la droite (d) est :

$$\delta=\frac{|3\times 1+4\times(-2)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$\delta=1{,}2$



B) Les Systèmes d'équations

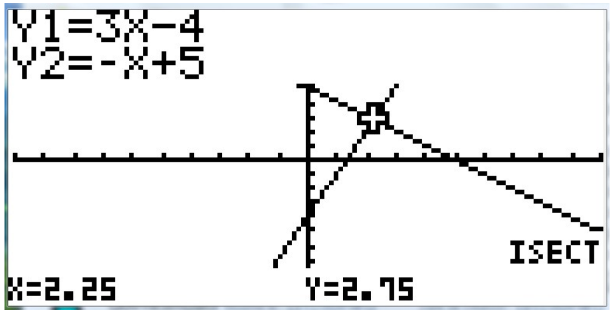
1) étude d'un exemple

on considère les droites $(d_1): y=3x-4$ et $(d_2): y=-x+5$; on vérifie facilement que (d_1) et (d_2) sont sécantes ; on cherche alors les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2) , noté A

→ ***Méthode graphique*** : on utilise la calculatrice CASIO

on programme ces 2 droites dans le Menu « GRAPH » :
$Y_1=3X-4$ et
$Y_2=-X+5$; puis on utilise le Menu « G-Solv »
puis l'onglet « ISCT »
et on lit $A(2{,}25 ; 2{,}75)$

Visualisation sur la calculatrice CASIO ------>



2) Méthode de substitution

→ ***Méthode par substitution*** :

on obtient le système $\begin{cases}y=3x-4\\ y=-x+5\end{cases}$ donc $\begin{cases}3x-4=-x+5\\ y=-x+5\end{cases}$ donc $\begin{cases}4x=9\\ y=-x+5\end{cases}$

donc $\begin{cases}x=2{,}25\\ y=-x+5\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=2{,}25\\ y=2{,}75\end{cases}$ donc $A(2{,}25 ; 2{,}75)$

3) Méthode par combinaison linéaire

→ ***Méthode par combinaisons linéaires*** :

on obtient le système $\begin{cases}y=3x-4\\ y=-x+5\end{cases}$ donc $\begin{cases}3x-y-4=0\,(L_1)\\ -x-y+5=0\,(L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases}3x-y-4=0\,(L_1)\\ 4x-9=0\,(L_1-L_2)\end{cases}$ donc $\begin{cases}3x-y-4=0\,(L_1)\\ x=2{,}25\,(L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases}3\times 2{,}25-y-4=0\,(L_1)\\ x=2{,}25\,(L_2)\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=2{,}25\\ y=2{,}75\end{cases}$ donc $A(2{,}25 ; 2{,}75)$