Les Lois de Probabilité

A) Les Variables aléatoires

1) étude d'un exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un de a six faces et on regarde le résultat." L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ s'appelle l'***Univers*** des possibles.

On considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$ qui peut prendre les valeurs $2;3;-4$

Ainsi on obtient les événements suivants :

- Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X=2$
- Pour l'issue 1, on a : $X=3$
- Pour les issues 3 et 5, on a : $X=-4$

Définition : On appelle ***Variable aléatoire*** une valeur réelle associée à un événement issue d'une probabilité

2) Loi de probabilité

Définition : On appelle ***Loi de Probabilité*** les valeurs $P(X=k)$ associées à chaque événement $\{X=k\}$ d'une variable aléatoire X

Exemple : On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent. $P(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; $P(X=3)=\frac{1}{6}$ et $P(X=-4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

on obtient donc la loi de Probabilité suivante :

k	2	3	-4	TOTAL
$P(X=k)$	$1/2$	$1/6$	$1/3$	1

Rque : on complète en général le tableau de toute loi de probabilité par la case "TOTAL" afin de vérifier que la loi est bien valide : $\sum P(X=k)=1$

Méthode : *Déterminer une loi de probabilité*
Vidéo : https://youtu.be/2Ge_4hclPnI

exemple : Soit l'expérience aléatoire :
"On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €
- Si on tire un roi, on gagne 5 €
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €

On note X le gain algébrique du joueur ;

a) Déterminer les valeurs possibles de X
b) Déterminer la loi de probabilité de X
c) Calculer $P(X\geqslant 5)$ et interpréter le résultat

solutions :
Les valeurs possibles de la variable aléatoire X sont $\{-1;2;5;7\}$

En effet, on peut détailler de la manière suivante :

- l'événement $(X=-1)$ est associé à "ne pas obtenir de roi ni de cœur"
- l'événement $(X=2)$ est associé à "obtenir un cœur" (sauf son roi)
- l'événement $(X=5)$ est associé à "obtenir un roi" (sauf le cœur)
- l'événement $(X=7)$ est associé à "obtenir le roi de cœur"

On obtient facilement la loi de probabilité suivante :

k	-1	2	5	7	TOTAL
$P(X=k)$	$21/32$	$7/32$	$3/32$	$1/32$	1

3) Espérance mathématique

Définition : On appelle ***Espérance mathématique*** d'une variable aléatoire X la "valeur moyenne" associée à cette variable X ;
on note cette Espérance : $E(X)=\sum_k k.P(X=k)$

Méthode : *Calculer l'espérance d'une loi de probabilité*
Vidéo : https://youtu.be/AcWVxHgtWp4

$$E(X)=(-1)\times\frac{21}{32}+2\times\frac{7}{32}+5\times\frac{3}{32}+7\times\frac{1}{32}=\frac{15}{32}=0{,}46875$$

interprétation : on "espère" gagner en moyenne 47 € sur 100 parties jouées

4) Variance & écart-type

Définition : On appelle ***Écart-type*** d'une variable aléatoire X l'écart moyen entre les valeurs de X et l'Espérance de X ;

on note les paramètres suivants :

- ***Variance*** d'une variable X : $V(X)=\sum_k k^2.P(X=k)-(E(X))^2$
- ***écart-type*** de X : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

exemple : on reprend le jeu précédent et on obtient :

$$V(X)=(-1)^2\times\frac{21}{32}+2^2\times\frac{7}{32}+5^2\times\frac{3}{32}+7^2\times\frac{1}{32}-\left(\frac{15}{32}\right)^2\simeq5{,}1865$$

donc on déduit : $\sigma(X)=\sqrt{5{,}1865}\simeq2{,}28$

interprétation : on "espère" gagner en moyenne 47 € € sur 100 parties jouées avec un écart moyen de plus ou moins 228 €

rque : on pourrait ainsi définir un « intervalle de confiance » associé à ce jeu :

$$I_C=[E(X)-\sigma(X);E(X)+\sigma(X)]=[47-228;47+228]=[-181;275]$$

cela signifie qu'il y a 68 % de chances que le gain algébrique de ce jeu varie entre « perdre 181 € » et « gagner 275 € » sur 100 parties
(la valeur 68 % sera expliquée en terminale ...)

B) La loi Binomiale

1) étude d'un exemple

On considère l'expérience suivante : on dispose de 2 urnes A et B

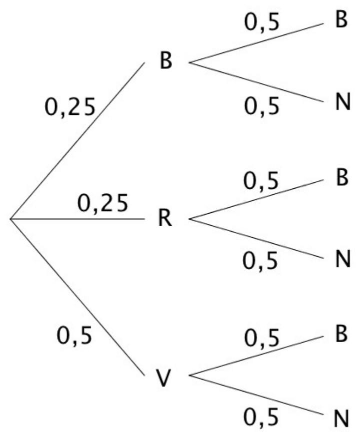
- l'urne A contient 1 jeton blanc, 1 jeton rouge et 2 jetons verts
- l'urne B contient 1 jeton blanc et 1 jeton noir

le jeu consiste à tirer successivement dans les 2 urnes

a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré
b) Calculer la probabilité P_1 d'obtenir deux jetons blancs
c) Calculer la probabilité P_2 de ne pas obtenir de jeton vert et d'obtenir un jeton noir
d) Peut-on considérer que cette expérience suit un schéma de *Bernouilli* ?

Rque : on observe alors que les choix des 2 urnes sont *indépendants*

solutions : on obtient l'arbre pondéré ci-contre



$P_1=P(B\cap B)=0{,}25\times0{,}5=0{,}125$

$$\begin{aligned}P_2&=P(\overline{V}\cap N)\\&=P(B\cap N)+P(R\cap N)\\&=0{,}25\times0{,}5+0{,}25\times0{,}5\\&=0{,}375\end{aligned}$$

on observe qu'il y a 3 choix possibles dans l'urne A alors qu'il n'y que 2 choix dans l'urne B

ainsi on en déduit que cette expérience ne correspond pas à un schéma de *Bernouilli*

2) Le schéma de *Bernouilli*

Définition : On dit qu'une variable aléatoire suit un « schéma de *Bernouilli* » si :

- il n'y a que ***2 issues*** possibles notées « succès » et « échec »
- les 2 issues sont ***indépendantes*** l'une de l'autre

exemples : les expériences aléatoires correspondent-elles à un schéma de *Bernouilli* ? Justifier la réponse

a) La naissance d'une fille sur 2 couples A & B
b) Obtenir « pile » sur 2 pièces A & B
c) Obtenir « six » sur 2 dés A & B

3) La loi de *Bernouilli*

Définition : Soit une variable aléatoire *X* suivant un « schéma de *Bernouilli* » on dit que X suit une loi de *Bernouilli* si :

- les valeurs possibles de X sont : **0** (« échec ») et **1** (« succès »)
- les probabilités associées sont $P(X=0)=1-p$ et $P(X=1)=p$
- le nombre p s'appelle : ***paramètre*** de la loi de *Bernouilli*
- *Notation globale* : $X\rightarrow B(p)$

exemples : on reprend les 3 énoncés précédents

a) La naissance d'une fille sur 2 couples A & B
On obtient les événements $(X=0)=(\text{le } \textit{couple a un garçon})$ et $(X=1)=(\text{le } \textit{couple a une fille})$ avec $p(X=0)=0{,}53$ et $p(X=1)=0{,}47$
on note $X\rightarrow B(0{,}47)$

b) Obtenir « pile » sur 2 pièces A & B

On obtient les événements $(X=0)=(\textit{on obtient face})$ et $(X=1)=(\textit{on obtient pile})$ avec $p(X=0)=0{,}5$ et $p(X=1)=0{,}5$

on note $X \to B(0{,}5)$

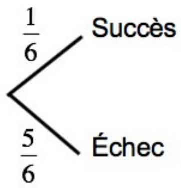
c) Obtenir « six » sur 2 dés A & B

On obtient les événements $(X=0)=(\textit{on obtient } 1;2;3;4;5)$ et $(X=1)=(\textit{on obtient } 6)$ avec $p(X=0)=\frac{5}{6}$ et $p(X=1)=\frac{1}{6}$

on note $X \to B(1/6)$

4) Répétitions d'épreuves de *Bernouilli*

exemple 1 : On lance 5 fois de suite un dé à six faces et on note à chaque fois le résultat. À chaque lancer, on considère comme succès "*obtenir un six*" et comme échec "*ne pas obtenir un six*".

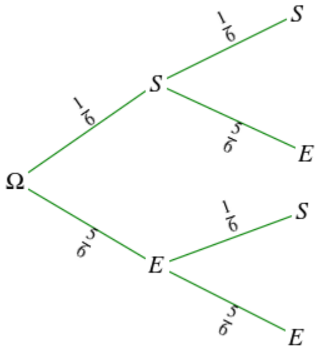


On répète ainsi 2 fois de suite la même expérience de *Bernoulli* (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes

a) Déterminer les valeurs possibles de X
b) Établir la loi de probabilité de X
c) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ puis interpréter les résultats

réponses : Les valeurs possibles de la variable aléatoire X sont $\{0;1;2\}$

On obtient l'arbre pondéré de la situation :



la loi de probabilité de X est :

k	0	1	2	TOTAL
$P(X=k)$	$25/36$	$5/18$	$1/36$	1

On obtient les paramètres suivants :

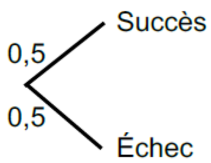
$E(X)=\frac{1}{3}$; $V(X)=\frac{5}{18}$; $\sigma(X)\simeq 0{,}527$

exemple 2 : On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie.

On considère comme succès "*obtenir Pile*" et comme échec "*obtenir Face*".

Ces expériences de Bernoulli sont identiques et indépendantes.

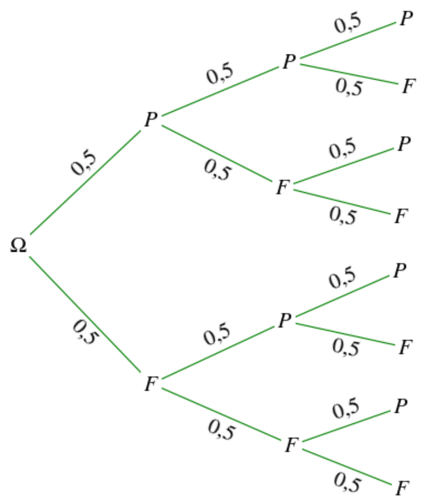
Pour chaque expérience, on a les probabilités suivantes :



a) Déterminer les valeurs possibles de X
b) Établir la loi de probabilité de X
c) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ puis interpréter les résultats

réponses : Les valeurs possibles de la variable aléatoire X sont $\{0;1;2;3\}$

On obtient l'arbre pondéré de la situation :



On obtient les paramètres suivants :

$E(X)=\frac{1}{3}$; $V(X)=\frac{5}{18}$;

$\sigma(X)\simeq 0{,}527$

la loi de probabilité de X est :

k	0	1	2	3	TOTAL
$P(X=k)$	0,125	0,375	0,375	0,125	1

***Méthode** : Calculer une probabilité associée à une épreuve de Bernoulli*

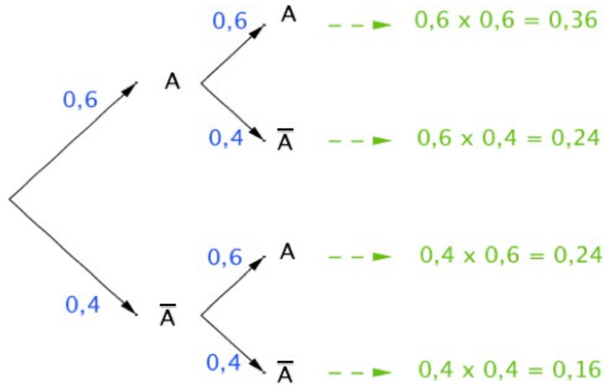
Vidéo : https://youtu.be/d8YAbeWou1E

énoncé : On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience 2 fois de suite.

1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer les probabilités suivantes :
   a) On tire deux boules blanches.
   b) On tire une boule blanche et une boule rouge.
   c) On tire au moins une boule blanche.

Solutions : On note A : "On tire une boule blanche" et $\overline{A}$: "on obtient une boule rouge" ; on note X le nombre d eboules blanches obtenues après les 2 tirages



$P(X=2)=0{,}36$

$P(X=1)=0{,}48$

$P(X\geqslant 1)=0{,}64$