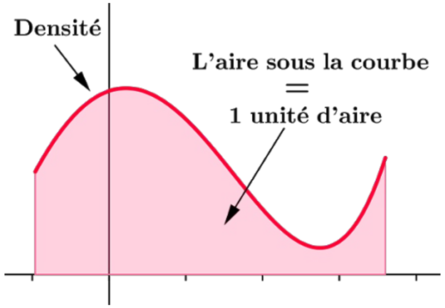
Les Lois de probabilité à densités

A) Notion de densité de probabilité

1) Définition d'une densité

Définition : Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle $[a;b]$; on dit que f est une "***densité***" de probabilité si les conditions suivantes sont vérifiées :

- f est **positive** pour tout $x \in [a;b]$
- $\int_a^b f(x).dx = 1$ (l'aire totale est **unitaire**)



<u>*exemples*</u> : Déterminer si les fonctions f suivantes représentent une densité de probabilité (on déterminera alors le paramètre k)

a) Soit $f(x)=k$ où $x \in [2;6]$
b) Soit $f(x)=kx+1$ où $x \in [0;4]$
c) Soit $f(x)=kx^2+\frac{3}{8}$ où $x \in [-2;2]$
d) Soit $f(x)=k.\sin(x)$ où $x \in [0;\pi]$

Méthode : *Déterminer si une fonction est une densité de probabilité*

Vidéo : https://youtu.be/r-8jxBaS7Ms

2) Calculs de probabilités

Propriétés : Soit f une fonction <u>densité</u> de probabilité sur $[a;b]$; on défini les calculs suivants :

- $P(X=k)=0$ pour tout $k \in [a;b]$
- $P(X \leqslant k)=\int_a^k f(x).dx$ pour tout $k \in [a;b]$
- $P(X \geqslant k)=\int_k^b f(x).dx$ pour tout $k \in [a;b]$
- $P(c \leqslant X \leqslant d)=\int_c^d f(x).dx$ pour tout $c,d \in [a;b]$

<u>*exemple*</u> : Soit la densité de probabilité $f(x)=\frac{1}{36}x(6-x)$ sur $[0;6]$

on vérifie que cette densité de probabilité est bien valide !

$$P(X \leqslant 2)=\int_0^2 f(x).dx \simeq 0{,}26 \quad ; \quad P(X \geqslant 3{,}5)=\int_{3{,}5}^6 f(x).dx \simeq 0{,}376$$

3) Espérance mathématique

Définition : Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle $[a;b]$; on appelle "Espérance mathématique" de X le nombre $E(X)=\int_a^b (x.f(x)).dx$

***Méthode** : Utiliser une loi de densité*

- **Vidéo** https://youtu.be/0Ry-2yLsANA
- **Vidéo** https://youtu.be/ol-tbf9sP6M

<u>*exemple*</u> : Soit la densité de probabilité $f(x)=\frac{1}{36}x(6-x)$ sur $[0;6]$

l'espérance mathématique de X est donné par :

$$E(X)=\int_0^6 (\frac{1}{36}x^2(6-x)).dx=\int_0^6 (\frac{-x^3}{36}+\frac{x^2}{6}).dx=[\frac{-x^4}{144}+\frac{x^3}{18}]_0^6=3$$

4) Variance & écart-type

Définition : Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle $[a;b]$; on appelle "Variance" de X le nombre $V(X)=\int_a^b (x-E(X))^2.f(x).dx$

Théorème de König-Huygens : La variance de X est définie par l'expression :

$$V(X)=\int_a^b (x^2.f(x)).dx-[E(X)]^2$$

<u>*exemple*</u> : Soit la densité de probabilité $f(x)=\frac{1}{36}x(6-x)$ sur $[0;6]$

la variance de X est donnée par :

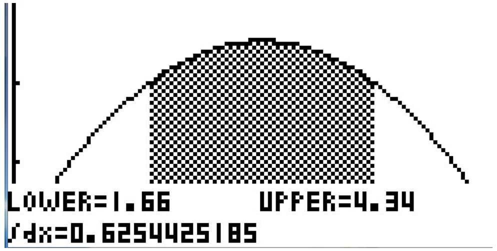
$$V(X)=\int_0^6 (x^2.\frac{1}{36}x(6-x)).dx-3^2=\int_0^6 (\frac{-x^4}{36}+\frac{x^3}{6}).dx-9=1{,}8$$

Définition : Soit f une fonction <u>continue</u> sur un intervalle $[a\,;b]$; on appelle "écart-type" de X le nombre $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

<u>exemple</u> : Soit la densité de probabilité $f(x)=\frac{1}{36}x(6-x)$ sur $[0\,;6]$

l'écart-type de X est alors
$\sigma(X)=\sqrt{1{,}8}\simeq 1{,}34$

<u>Rque</u> : on peut interpréter graphiquement
$E(X)=3$ et $\sigma(X)=1{,}34$



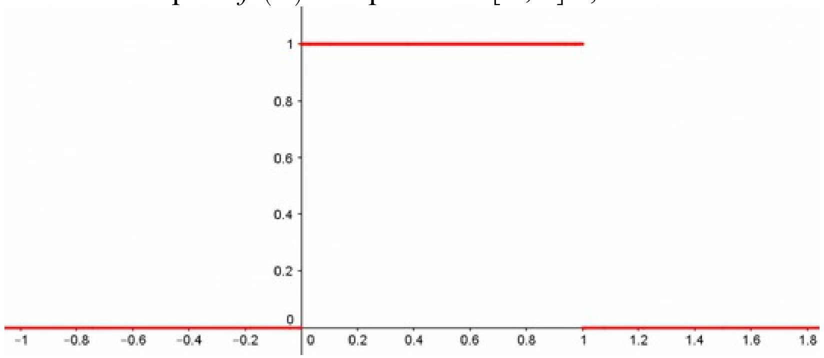
B) La loi Uniforme

1) Densité de probabilité

<u>exemple</u> : Des machines remplissent des bouteilles de lait de 1 litre. L'une d'entre elles est défectueuse et, au passage de chaque bouteille, elle se bloque après une quantité aléatoire de lait versée et comprise entre 0 et 1 litres ;

Soit X la variable aléatoire définissant la quantité de lait versée par la machine ; Alors X suit la loi Uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$;

Définition : X suit la loi Uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$ si sa densité de probabilité est définie par $f(x)=1$ pour $x\in[0\,;1]$; on note $X\rightarrow U([0\,;1])$

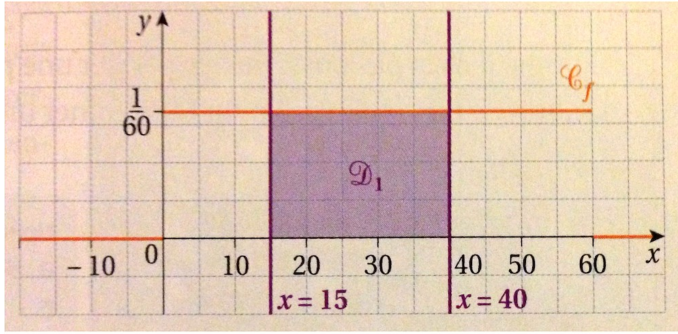


<u>exemple</u> : **Vidéo** https://youtu.be/yk4ni_iqxKk

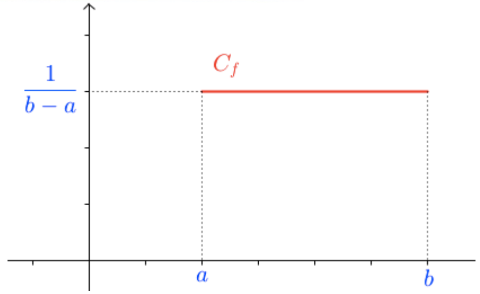
Suite à un problème de réseau, un client contacte le service après-vente de son opérateur. Un conseiller l'informe qu'un technicien le rappellera pour une intervention à distance entre 14h et 15h. Sachant que ce technicien appelle de manière aléatoire sur le créneau donné, on souhaite calculer la probabilité que le client patiente entre 15 et 40 minutes.

On désigne par T la variable aléatoire continue qui donne le temps d'attente en minutes ; on a donc $P(15\leqslant T\leqslant 40)=\frac{40-15}{60}=\frac{5}{12}$

cette probabilité représente l'aire D_1 "sous la courbe" de la densté $f(x)=\frac{1}{60}$



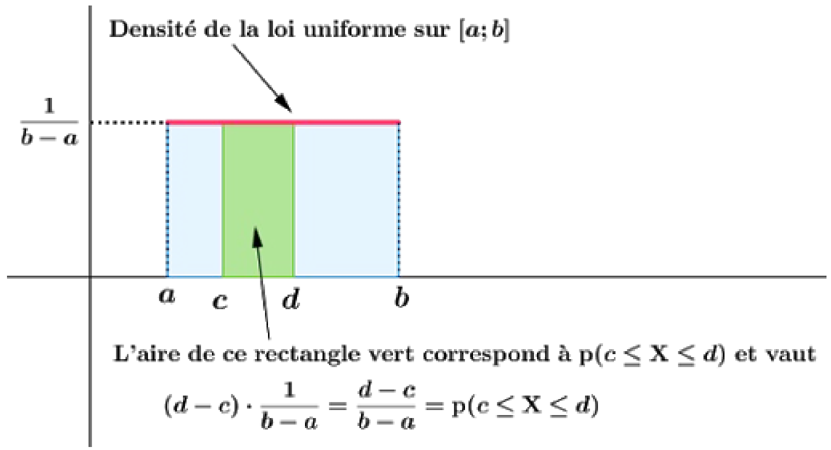
Définition : X suit la loi Uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ si sa densité de probabilité est définie par $f(x)=\frac{1}{b-a}$ pour $x\in[a\,;b]$; ainsi $X\rightarrow U([a\,;b])$



2) Calculs de probabilités

Propriétés : Soit X une variable suivant la <u>loi Uniforme</u> sur $[a\,;b]$; on défini les calculs suivants :

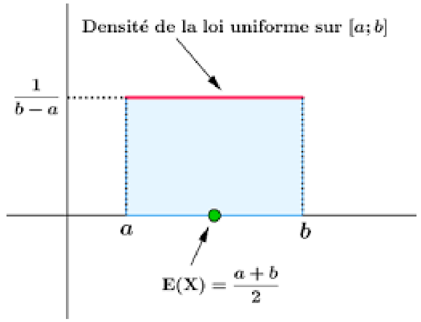
- $P(X=k)=0$ pour tout $k\in[a\,;b]$
- $P(c\leqslant X\leqslant d)=\frac{d-c}{b-a}$ pour tout $c\,,d\in[a\,;b]$



3) Paramètres de la loi

Propriétés : Soit X une variable suivant la <u>loi Uniforme</u> sur $[a\,;b]$; on défini

- l'Espérance de X : $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$
- la Variance de X : $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
- l'Écart-type de X : $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{\sqrt{12}}$



Preuves :

$$E(X)=\int_a^b (x.f(x)).dx=\int_a^b \left(\frac{x}{b-a}\right).dx=\left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

$$V(X)=\int_a^b (x^2.f(x)).dx-[E(X)]^2=\int_a^b \left(\frac{x^2}{b-a}\right).dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$=\frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{(a-b)^2}{12}}=\frac{b-a}{\sqrt{12}} \quad \text{car} \quad a<b$$

C) La loi Exponentielle

1) Densité de probabilité

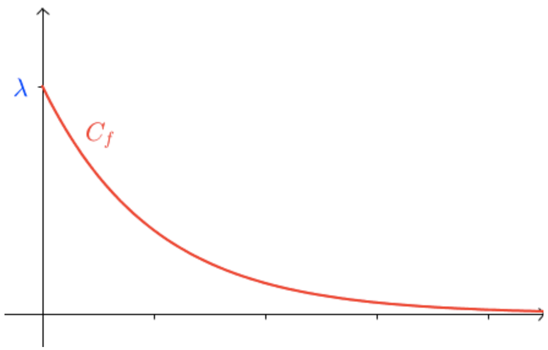
Définition : X suit la loi Exponentielle sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ si sa densité de probabilité est définie par

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x\in[0\,;+\infty[$;

on note $X\rightarrow E(\lambda)$ avec $\lambda>0$

<u>Contextes d'utilisation :</u>

Durée de vie de composants électroniques, tremblements de terre, désintégration d'un noyau radioactif de type Césium ou Uranium, …

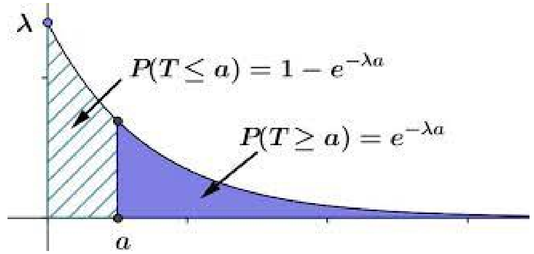


2) Calculs de probabilités

Propriétés : Soit X suivant une <u>loi Exponentielle</u> de paramètre $\lambda>0$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$; on défini les calculs suivants pour tout $k\in[0\,;+\infty[$

- $P(X=k)=0$
- $P(X\leqslant k)=1-e^{-\lambda k}$
- $P(X\geqslant k)=e^{-\lambda k}$
- $P(c\leqslant X\leqslant d)=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$

pour tout $c,d\in[0\,;+\infty[$



Vidéo : https://youtu.be/tL8-UTORSLM

3) Paramètres de la loi

Propriétés : Soit X suivant une <u>loi Exponentielle</u> de paramètre $\lambda>0$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$; on a $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$; $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$; $\sigma(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Preuves : $E(X)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(x.f(x)).dx=\int_0^{+\infty}(x.\lambda e^{-\lambda x}).dx=\lambda\int_0^{+\infty}(x e^{-\lambda x}).dx$

on pose alors $f(x)=xe^{-\lambda x}$ et on cherche une primitive de f notée F

soit $F(x)=\left(\dfrac{-1}{\lambda}x-\dfrac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda x}$ (on <u>admet</u> ce résultat !)

donc $E(X)=\lambda\left[\left(\dfrac{-1}{\lambda}x-\dfrac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}=\left[\left(-x-\dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}=0-\left(\dfrac{-1}{\lambda}\right)e^{\lambda .0}=\dfrac{1}{\lambda}$

$$V(X)=\int_0^{+\infty}(x^2.f(x)).dx-(E(X))^2=\int_0^{+\infty}(x^2.\lambda e^{-\lambda x}).dx-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty}(x^2 e^{-\lambda x}).dx-\frac{1}{\lambda^2}$$

on pose alors $g(x)=x^2 e^{-\lambda x}$ et on cherche une primitive de g notée G

soit $G(x)=\left(\dfrac{-1}{\lambda}x^2-\dfrac{2}{\lambda^2}x-\dfrac{2}{\lambda^3}\right)e^{-\lambda x}$ (on <u>admet</u> ce résultat !)

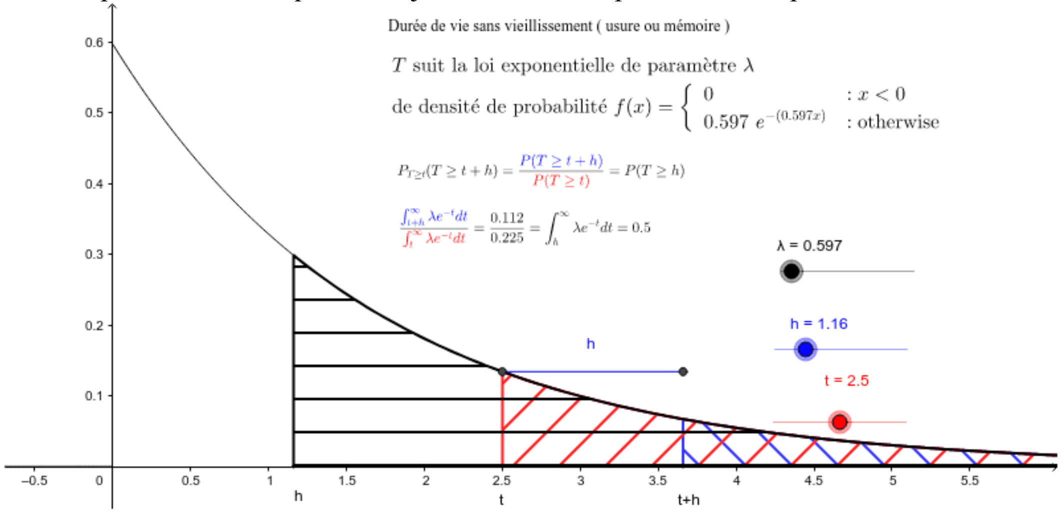
donc $V(X)=\lambda\left[\left(\dfrac{-1}{\lambda}x^2-\dfrac{2}{\lambda^2}x-\dfrac{2}{\lambda^3}\right)e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}-\dfrac{1}{\lambda^2}=\lambda\left(0-\dfrac{2}{\lambda^3}\right)e^{-\lambda .0}-\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{\lambda^2}$

ainsi on déduit facilement que $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\dfrac{1}{\lambda^2}}=\dfrac{1}{\lambda}$

4) Lois "sans mémoire"

Propriété : Soit X suivant une <u>loi Exponentielle</u> de paramètre $\lambda>0$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$; alors pour tous réels t et h strictement positifs :
$P_{(X\geqslant t)}(X\geqslant t+h)=P(X\geqslant h)$

Rque : on appelle cette propriété « *loi sans mémoire* » car la probabilité d'une durée de vie d'un temps « *h* » sachant qu'elle a déjà duré sur un temps « *t* » est indépendante de t



Méthode : *Utiliser la propriété d'absence de mémoire*
Vidéo https://youtu.be/ZS_sW8yq-94

<u>*exemple*</u> *:* La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}0035$;
Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.

On cherche $P_{(X\geqslant 200)}(X<300)$ par définition d'une probabilité conditionnelle

or $P_{(X\geqslant 200)}(X<300)=1-P_{(X\geqslant 200)}(X\geqslant 300)=1-P(X\geqslant 300-200)$

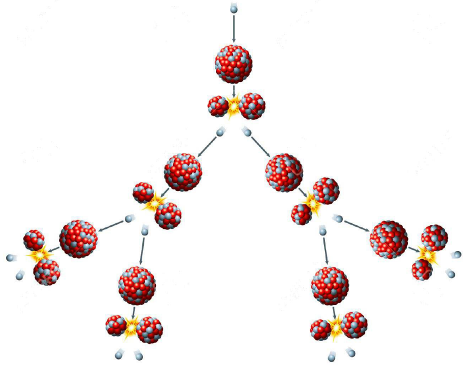
$$=1-P(X\geqslant 100)=1-e^{-0{,}0035\times 100}$$

$$=1-e^{-0{,}35}\simeq 0{,}295$$

<u>*interprétation*</u> *:* cela signifie que cette carte d'anniversaire musicale aura environ 30% de chances de fonctionner encore avant de tomber en panne 300h plus tard
on appelle cela les pannes de "fin de vies"

<u>*exemple*</u> *: application à la physique --> désintégration radioactive*

La désintégration radioactive est un phénomène aléatoire. c'est à dire que l'on ne peut pas, à l'échelle « *microscopique*», dire quand un noyau va se désintégrer.
Néanmoins, à l'échelle macroscopique, on a pu établir que la durée de vie d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement ; c'est à dire une loi exponentielle de paramètre λ ; la valeur λ étant la constante radioactive (en s^{-1}) qui caractérise un radionucléide.



On appelle T la variable aléatoire associée à la durée de vie d'un noyau. La probabilité p qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est donc :
$p=P(T\geqslant t)=e^{-\lambda t}$

Si au départ on compte N_0 noyaux au bout d'un temps t , on en comptera $N(t)$ qui vérifie : $N(t)=N_0 e^{-\lambda t}$
On appelle demi-vie $t_{1/2}$, le temps nécessaire pour que le nombre de radionucléides soit divisé par 2. On a alors : $N(t_{1/2})=\dfrac{N_0}{2}$

donc $N_0 e^{-\lambda . t_{1/2}}=\dfrac{N_0}{2}$ donc $e^{-\lambda . t_{1/2}}=\dfrac{1}{2}$ donc $-\lambda . t_{1/2}=\ln(\dfrac{1}{2})$

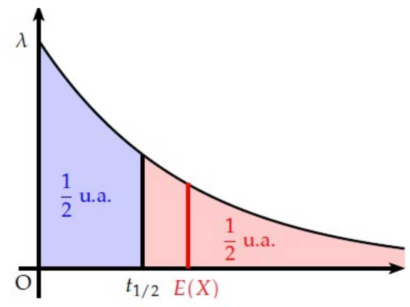
donc $-\lambda . t_{1/2}=-\ln(2)$ donc $t_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Propriété : Pour une variable aléatoire X qui suit une loi de "durée de vie sans vieillissement", on appelle **demi-vie** la durée $t_{1/2}$ tel que $P(X>t_{1/2})=\dfrac{1}{2}$

On obtient alors : $t_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Enfin la durée de vie moyenne $t_{moy}=\tau$ d'un radionucéide est donnée par l'espérance mathématique : $\tau=E(T)=\dfrac{1}{\lambda}$ or

$t_{1/2}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ donc $\tau=\dfrac{t_{1/2}}{\ln 2}\simeq 1{,}44 . t_{1/2}$



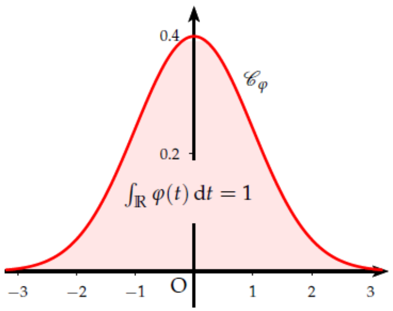
D) Les lois Normales

1) Courbe de GAUSS

Lorsqu'on étudie la loi binomiale sur un grand nombre d'expériences ($n > 50$) à condition que la probabilité de succès sur une expérience ne soit pas trop petite ($p > 0, 1$), on peut approximer cette loi binomiale par une loi normale dont la représentation est une courbe en cloche ou ***courbe de Gauss***. On passe ainsi d'une distribution discrète à une distribution continue beaucoup plus souple.

Définition : **La densité de probabilité de Laplace-Gauss**

On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}$ avec $t\in\mathbb{R}$



Rques : Cette fonction ϕ correspond bien à une densité de probabilité :

- ϕ est bien continue et positive sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues et la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$)
- Cette fonction ϕ est paire et admet en 0 un maximum : $\phi(0)\simeq 0{,}4$
- Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1. (résultat admis !)
- La courbe C_ϕ est appelée **courbe en cloche** ou **courbe de Gauss**.

Note : on pourra utiliser le résultat suivant : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}.dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ pour tout $a>0$

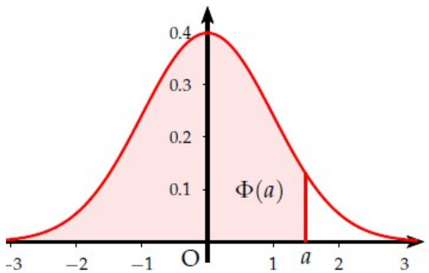
2) Loi Normale « centrée-réduite »

Définition : On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite, notée $N(0;1)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction

$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}$ Sa fonction de répartition

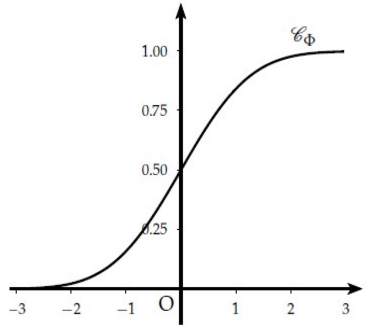
Φ est donc définie par :

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t).dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$$



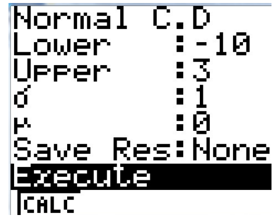
Rque : le nombre $\Phi(a)$ représente l'aire du domaine délimité par cette courbe en cloche l'axe des abscisses et la droite $x=a$

Propriétés : La fonction de répartition Φ vérifie :



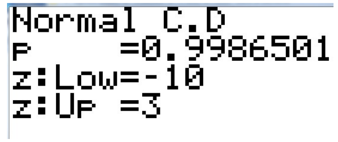
- Φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$
- Φ est strictement croissante avec $\Phi(0)=0{,}5$
- C_Φ admt un centre de symétrie en $A(0;0{,}5)$
- en pratique $\Phi(a)$ est calculé à l'aide de la calculatrice ou de Tables ("*abaques*")

CASIO : Pour calculer $\Phi(a)$ on utilise l'instruction : $NormalCD(-10,a,1,0)$



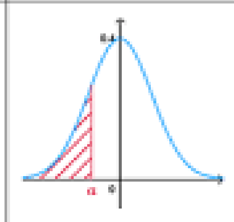
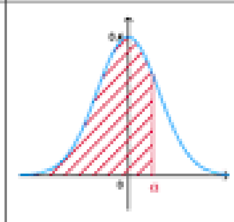
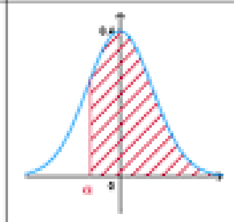
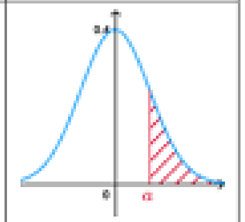
--> exemple avec $\Phi(3)$

$\Phi(3)=P(X\leqslant 3)\simeq 0{,}99865$

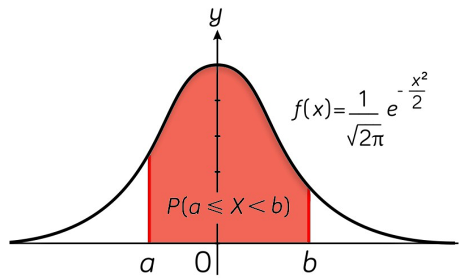


3) Calculs de probabilités

Propriétés : Soit X une variable aléatoire avec $X\to N(0;1)$ alors pour tous réels a et b tels que $a\leqslant b$, on a :

Proba	$P(X<a)$ $a<0$	$P(X<a)$ $a>0$	$P(X>a)$ $a<0$	$P(X>a)$ $a>0$
Graphique				
Calcul	$0,5-P(a\leq X\leq 0)$	$0,5+P(0\leq X\leq a)$	$0,5+P(a\leq X\leq 0)$	$0,5-P(0\leq X\leq a)$

- $P(X\leqslant a)=\Phi(a)$
- $P(X\leqslant -a)=1-\Phi(a)$
- $P(X\geqslant a)=1-\Phi(a)$
- $P(a\leqslant X\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a)$
- $P(-a\leqslant X\leqslant a)=2\Phi(a)-1$



Rque : Certaines valeurs interviennent souvent, il est bon de lesmémoriser.

$P(-1\leqslant X\leqslant 1)\simeq 0{,}683$; $P(-2\leqslant X\leqslant 2)\simeq 0{,}954$; $P(-3\leqslant X\leqslant 3)\simeq 0{,}997$

4) Paramètres de la loi N(0;1)

Propriétés : Soit X une variable aléatoire avec $X \to N(0;1)$ alors on a les résultats suivants : $E(X)=0$; $V(X)=1$; $\sigma(X)=1$

Preuves :

Calcul de l'Espérance mathématique de X :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt+\int_{0}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=I_1+I_2$$

or on a $I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$

et $I_2=\int_{0}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$

de plus

$$\int_{a}^{0}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{a}^{0}t.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.[e^{\frac{-t^2}{2}}]_a^0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.(1-e^{\frac{-a^2}{2}})$$

donc par passage a la limite : $I_1=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.(1-e^{\frac{-a^2}{2}})\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

et $\int_{0}^{a}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{0}^{a}t.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.[e^{\frac{-t^2}{2}}]_0^a=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.(e^{\frac{-a^2}{2}}-1)$

donc par passage a la limite : $I_2=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.(e^{\frac{-a^2}{2}}-1)\right)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}$

finalement on déduit que $\boldsymbol{E(X)}=I_1+I_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=\mathbf{0}$

Calcul de la Variance de X :

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt-(0)^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty}t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$$

soit encore $V(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{0}t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{0}^{+\infty}t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=I_1+I_2$

ainsi $I_1=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$

Avec une « intégration par parties » :

$$I_a=\int_{a}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=[\frac{-t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}]_a^0+\int_{a}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$$

Soit encore $I_a=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-a^2}{2}}+\Phi(0)-\Phi(a)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-a^2}{2}}+\frac{1}{2}-\Phi(a)$

donc par passage a la limite : $I_1=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-a^2}{2}}+\frac{1}{2}-\Phi(a)\right)=0+\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

de même : $I_2=\int_{0}^{+\infty}t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$

Avec une « intégration par parties » :

$$J_a=\int_{0}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.t^2.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt=[\frac{-t}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}]_0^a+\int_{0}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-t^2}{2}}.dt$$

Soit encore $J_a=\frac{-a}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-a^2}{2}}+\Phi(a)-\Phi(0)=\frac{-a}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-a^2}{2}}+\Phi(a)-\frac{1}{2}$

donc par passage a la limite : $I_2=\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{-a}{\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-a^2}{2}}+\Phi(a)-\frac{1}{2}\right)=0+1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

finalement $\boldsymbol{V(X)}=I_1+I_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\mathbf{1}$

enfin il est évident que $\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=\mathbf{1}$

<u>Remarque</u> : C'est pour cette raison que cette ***loi normale*** est

- ***centrée*** : $E(X)=\mathbf{0}$
- ***réduite*** : $V(X)=\mathbf{1}$

$(Remarque)^2$: ***Attention !*** La notation peut alors prêter à confusions ; en effet $X\to N(\mathbf{0};\mathbf{1})$ indique alors que $E(X)=\mathbf{0}$ et $V(X)=\mathbf{1}$

5) Les lois Normales générales

Définition : On dit que la variable aléatoire X suit une loi normale générale, notée $N(\mu;\sigma^2)$ si sa densité de probabilité est égale à la fonction

$$\phi(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{avec} \quad t\in\mathbb{R}$$

Théorème de MOIVRE-LAPLACE :

Si X suit la loi normale générale $N(\mu;\sigma^2)$ en posant $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ alors Z est une variable aléatoire suivant la loi Normale « centrée-réduite » $N(0;1)$

Conséquence : Si X suit la loi normale générale $N(\mu;\sigma^2)$ alors on a les paramètres : $E(X)=\mu$; $V(X)=\sigma^2$

Preuves : On a $X\rightarrow N(\mu;\sigma^2)$ et $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ avec $Z\rightarrow N(0;1)$
donc $E(Z)=0$ et $V(Z)=1$
or $X=\mu+\sigma.Z$ donc $E(X)=E(\mu+\sigma.Z)=E(\mu)+\sigma.E(X)=\mu+\sigma\times 0=\mu$
de même $E(X)=V(\mu+\sigma.Z)=V(\mu)+\sigma^2.V(X)=0+\sigma^2\times 1=\sigma^2$

<u>Exemple</u> : Les températures de l'eau du mois de juillet, autour du lac Léman, suivent la loi normale d'espérance 18,2°C et d'écart-type 3,6 °C.
Une personne part camper en juillet sur le pourtour du lac Léman.
Que peut-on lui indiquer comme probabilité de température de l'eau des plages dans les cas suivants :

a) températures inférieures à 16 °C
b) températures comprises entre 20°C et 24,5°C
c) températures supérieures à 21°C

<u>Solutions</u> : Soit T la température de l'eau du mois de juillet ; d'après l'énoncé $T\rightarrow N(18,2\ ;3,6^2)$, on pose alors $Z=\frac{T-18,2}{3,6}$ donc d'après le ***Théorème de Moivre-Laplace***, $Z\rightarrow N(0;1)$;

on obtient donc :

$$P(T\leqslant 16)=P(Z\leqslant\frac{16-18,2}{3,6})=P(Z\leqslant -0,611)$$
$$=\Phi(-0,611)1-\Phi(0,611)=1-0,729=0,271$$
$$=1-0,729=0,271$$

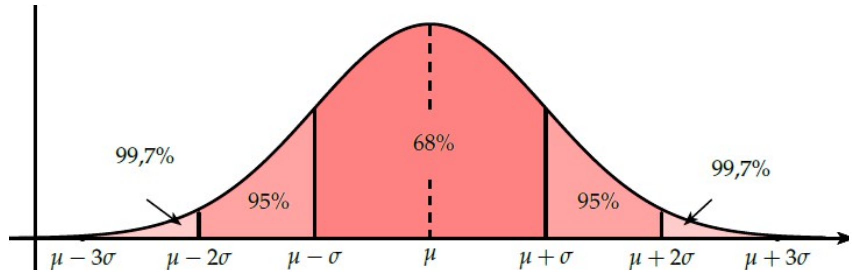
de même :
$$P(T\leqslant 16)=P(Z\leqslant\frac{16-18,2}{3,6})=P(Z\leqslant -0,611)$$
$$=\Phi(1,75)-\Phi(0,5)=0,960-0,692=0,268$$

et enfin :
$$P(T\geqslant 21)=P(Z\geqslant\frac{21-18,2}{3,6})=P(Z\geqslant 0,778)$$
$$=1-\Phi(0,778)=1-0,782=0,218$$

6) Valeurs remarquables de GAUSS

Propriété : Si X suit la loi normale générale $N(\mu;\sigma^2)$ alors on obtient les « valeurs remarquables » suivantes :

- $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\simeq 0,683$
- $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\simeq 0,954$
- $P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\simeq 0,97$



Propriété : Influences des valeurs de μ ***et*** σ
Si X suit la loi normale générale $N(\mu;\sigma^2)$ alors on obtient :

- Le maximum de la « courbe en cloche » est obtenu pour $t=\mu$
- Plus la valeur de σ est petite plus la « courbe en cloche » est « étroite »
- Plus la valeur de σ est grande plus la « courbe en cloche » est « élargie »