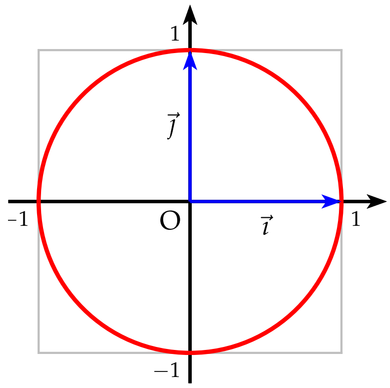
Trigonométrie dans le cercle

Table des matières

1 Angles dans un cercle

1.1 Cercle trigonométrique

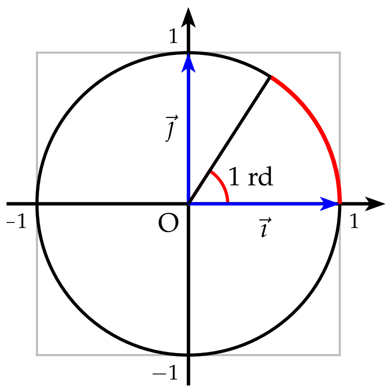
Définition 1 : On appelle cercle trigonométrique dans un repère orthogonal direct $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$, le cercle de centre O et de rayon 1.



1.2 Le radian

Définition 2 : La radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré. Il est défini comme la longueur de l'arc entre 2 points du cercle unité.

Le demi cercle unité a un longueur de π et donc correspond à un angle de π radian. On a alors : $180°=\pi$ rd



La mesure en degré de 1 radian vaut donc :

$$1 \text{ rd} = \frac{180}{\pi} \simeq 57°$$

Remarque : Le radian est une grande unité qui n'est pas intuitive contrairement au degré qui est notre unité première.

Avantage : Permet de connaître la longueur d'un arc. Unité du système international

Il est important de connaître les angles remarquables en radian :

Degré	30°	45°	60°	90°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exemple : Convertir en radian les angles en degré suivants :

$$15^\circ \quad , \quad 36^\circ \quad , \quad 75^\circ \quad , \quad 120^\circ \quad , \quad 135^\circ \quad , \quad 150^\circ$$

Pour convertir un angle en radian, on utilise la conversion 180°=π rd, soit pour x degré on a : $\dfrac{x\,\pi}{180}$ radian.

On obtient alors :

Degré	15°	36°	75°	120°	135°	150°
Radian	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Exemple : Convertir en degré les angles en radian suivant :

$$\frac{\pi}{8} \quad , \quad \frac{7\pi}{12} \quad , \quad \frac{5\pi}{18} \quad , \quad \frac{11\pi}{6}$$

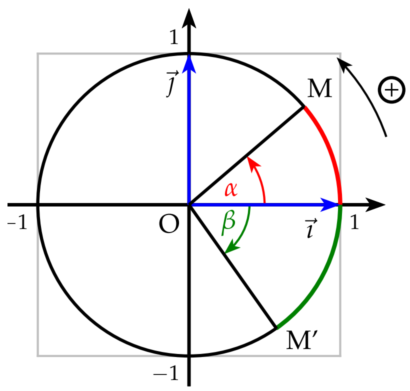
Pour convertir un angle en degré, on utilise la conversion 180°=π rd, soit pour y radian on a : $\dfrac{y\,180}{\pi}$ degré.

Radian	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{11\pi}{6}$
Degré	22,5°	105°	50°	330°

1.3 Angles dans le cercle trigonométrique

Définition 3 : La mesure d'un angle α repéré par un point M dans le cercle trigonométrique, est la valeur algébrique de la longueur de l'arc AM où $A(1;0)$

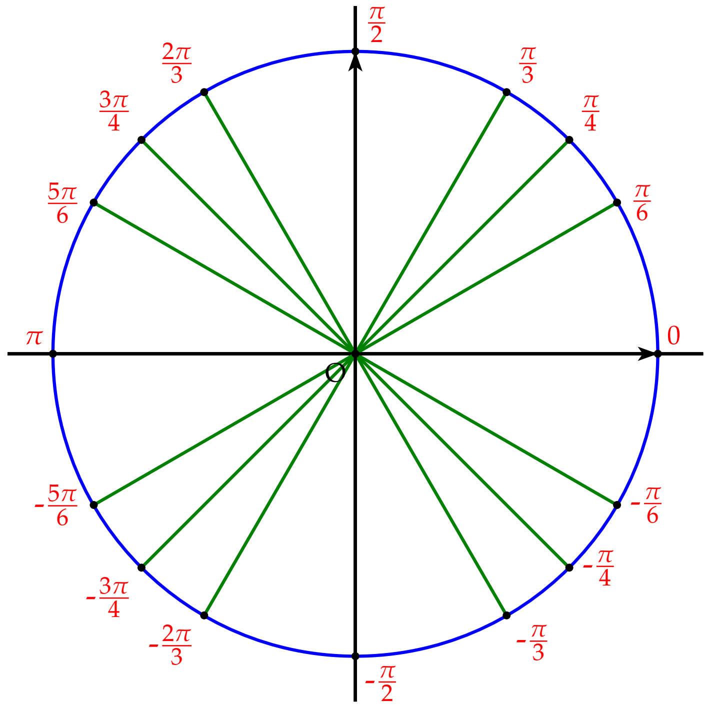
Le sens trigonométrique ou direct correspond au sens antihoraire.



On a représenté deux angles α et β dont l'un est positif α et l'autre négatif β.

On remarquera que l'on a indiqué le sens trigonométrique

On peut noter les angles remarquables sur le cercle trigonométrique. Il est important de visualiser l'emplacement des angles pour s'en faire une idée.

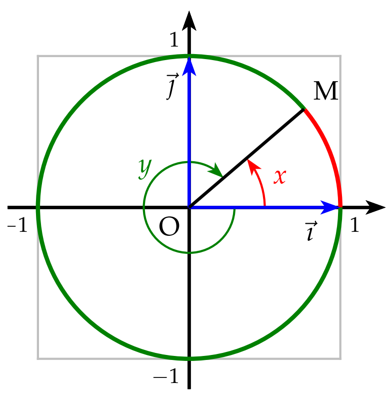


Propriété 1 : Un même angle α peut avoir plusieurs mesures.

Si un angle α, repéré par le point M sur le cercle trigonométrique, a comme mesures x et y, alors on a la relation suivante :

$$y = x + k2\pi \quad \text{ou plus simplement} \quad y = x\ [2\pi] \quad y \text{ égal } x \text{ modulo } 2\pi$$

Exemple : Soit deux mesures sur le cercle trigonométrique d'un même angle :



Sur la figure ci-contre on a tracé deux mesures d'un même angle repéré par un point M.

Par exemple $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $y = -\dfrac{11\pi}{6}$.
En effet :

$$\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{(1+11)\pi}{6} = 2\pi$$

Définition 4 : On appelle **mesure principale** d'un angle α, la mesure x qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exemple : Trouver la mesure principale des angles dont les mesures sont : $\dfrac{17\pi}{4}$ et $-\dfrac{31\pi}{6}$

$\dfrac{17\pi}{4}$ est un mesure trop grande, il faut donc lui enlever un nombre k de tours (2π) pour obtenir la mesure principale :

$$\frac{17\pi}{4} - k\,2\pi = \frac{\pi(17-8k)}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{avec} \quad k = 2$$

$-\dfrac{31\pi}{6}$ est une mesure trop petite, il faut donc lui rajouter un nombre k de tours (2π) pour obtenir la mesure principale :

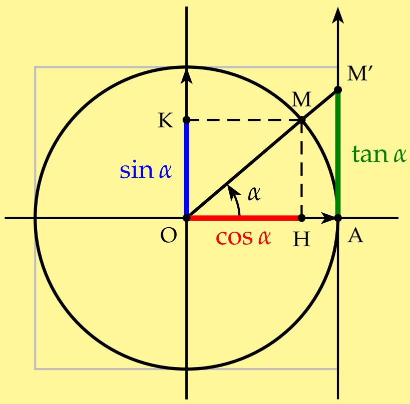
$$-\frac{31\pi}{6} + k\,2\pi = \frac{\pi(-31+12k)}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{avec} \quad k = 3$$

2 Lignes trigonométriques

2.1 Définitions

Définition 5 : Soit un angle α repéré par un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle :

- $\cos\alpha = \overline{\text{OH}}$ projection de M sur l'axe des abscisses
- $\sin\alpha = \overline{\text{OK}}$ projection de M sur l'axe des ordonnées
- $\tan\alpha = \overline{\text{AM}'}$ intersection de (OM) avec la tangente en A



Remarque : Pour tout réel x, on a :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{et} \quad 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2.2 Tableau des angles remarquables

Comme déjà vu dans le chapitre sur les configurations, voici le tableau à très bien connaître :

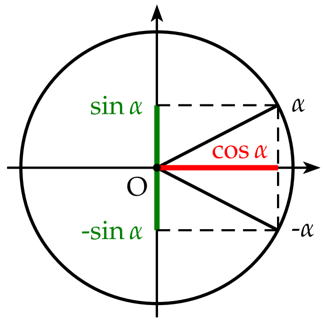
Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	?

2.3 Relations entre deux angles

a) Angles opposés

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

On peut constater que les fonctions sinus et tangente sont impaires tandis que la fonction cosinus est paire



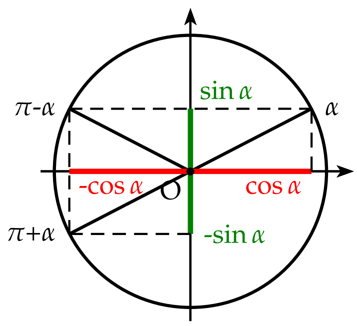
b) Angles supplémentaires et opposés supplémentaires

Angles supplémentaires

$$\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

Angles opposés supplémentaires

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi + \alpha) = +\tan\alpha$$

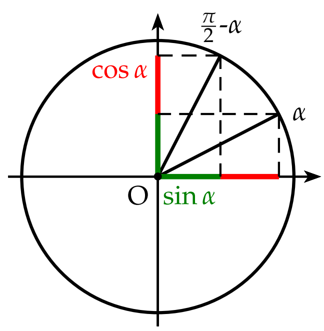


c) Angles complémentaires et opposés complémentaires

Angles complémentaires

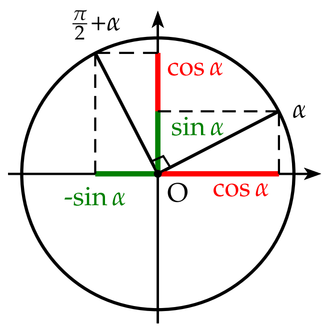
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$



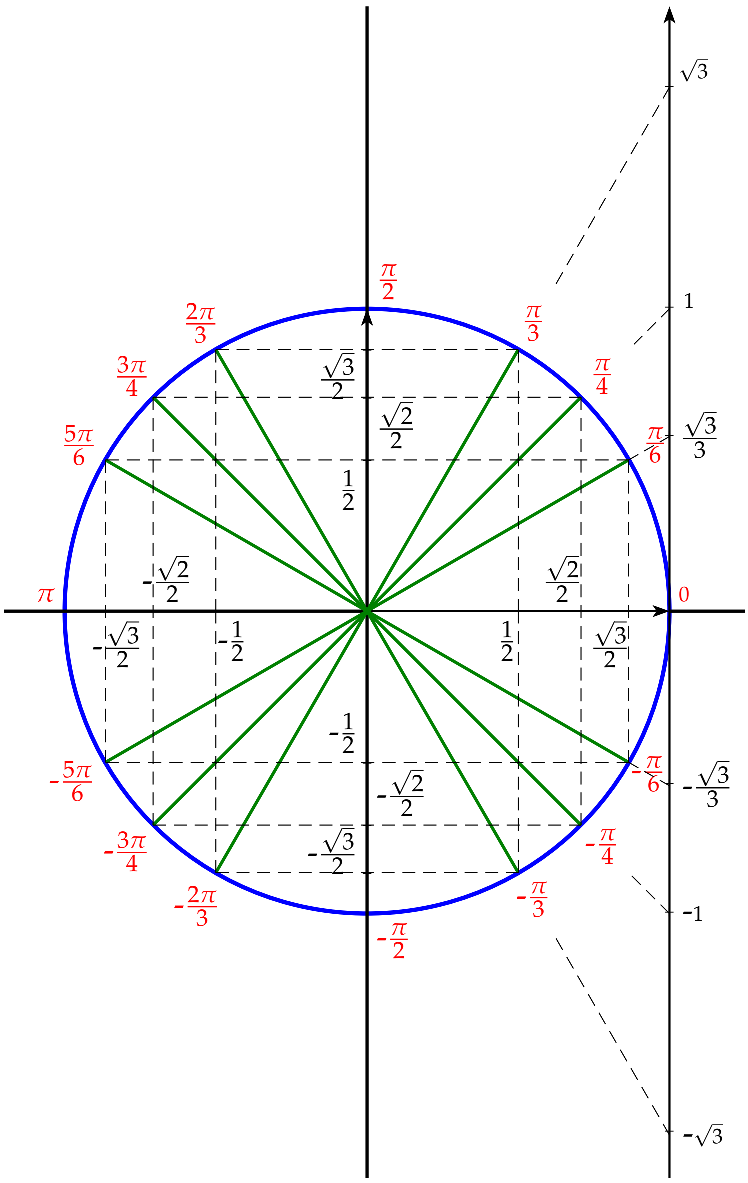
Angles opposés complémentaires

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$$



2.4 Lignes trigonométriques dans le cercle

Voici sur le cercle trigonométrique l'ensemble des lignes trigonométriques des angles remarquables dans le cercle trigonométrique.



Exemple : Calculer le cosinus, le sinus et la tangente des angles suivants :

$$-\frac{\pi}{3} \quad , \quad \frac{5\pi}{6} \quad , \quad \frac{7\pi}{4}$$

- Avec $-\dfrac{\pi}{3}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

- Avec $\dfrac{5\pi}{6}$

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Avec $\dfrac{7\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

3 Représentation des fonction sinus, cosinus et tangente

Les courbes des fonction sinus et cosinus s'appelle des sinusoïdes. Elle sont identiques à une translation près.

La courbe de la fonction tangente n'a pas de nom. On peut remarquer que la fonction tangente n'est pas définie en $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.