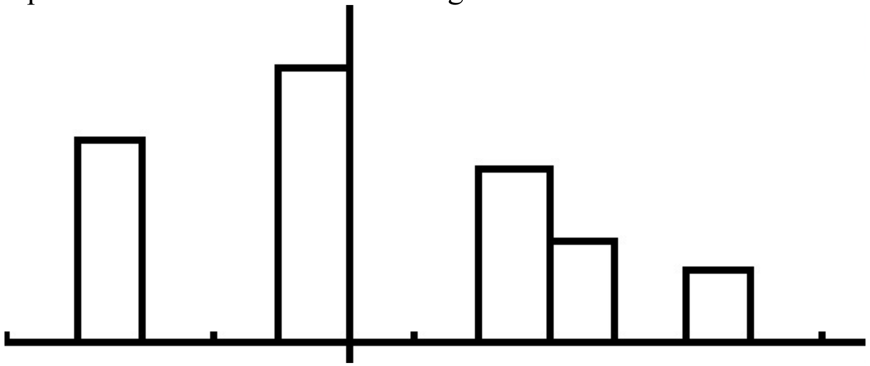
Ex 1 : On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X correspondant au gain algébrique d'un jeu :

Valeurs x_i	-4	-1	2	3	5
Probabilités p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

le graphique de cette loi sous forme de diagramme en barres :



l'espérance mathématique de X est :

$$E(X)=\sum x_i.p_i=(-4)\times\frac{1}{4}+(-1)\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{24}+3\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{12}=-0,125$$

Interprétation :
En moyenne, sur un 1000 parties jouées on « espère » perdre 125 €

la variance et l'écart-type de X :

$$V(X)=\sum x_i^2.p_i-(E(X))^2$$
$$=(-4)^2\times\frac{1}{4}+(-1)^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{5}{24}+3^2\times\frac{1}{8}+5^2\times\frac{1}{12}-(-0,125)^2$$
$$=\frac{535}{64} \quad \text{et} \quad \sigma(X)=\sqrt{\frac{535}{64}}\simeq 2,9$$

l'intervalle de confiance du gain algébrique de ce joueur avec une fiabilité de 68 %

$$I_C=[E(X)-\sigma(X);E(X)+\sigma(X)]=[-0,125-2,9;-0,125+2,9]$$

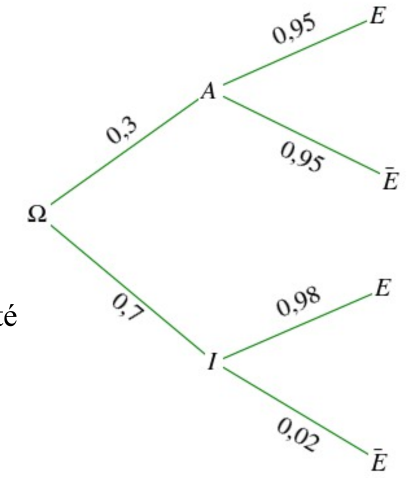
soit $I_C=[-3,025;2,775]$

Interprétation : En moyenne, sur un grand nombre de parties le gain moyen de ce jeu sera compris entre « perdre 3 € » et « gagner 2,8 € »

Ex 2 : Une compagnie aérienne a mis en place pour une de ses lignes un système de surréservation afin d'abaisser les coûts. Les réservations ne peuvent se faire qu'auprès d'une agence ou sur le site Internet de la compagnie.

Partie A

arbre pondéré traduisant cette situation



probabilité qu'un client ne se présente pas à l'embarquement est de 0,029

$$p(\overline{E})=p(A\cap E)+p(I\cap E)$$
$$=0,3\times 0,05+0,7\times 0,02=0,029$$

probabilité que la réservation ait été faite en agence sachant que le client ne s'est pas présenté à l'embarquement

$$p_{\overline{E}}(A)=\frac{p(A\cap\overline{E})}{p(\overline{E})}=\frac{0,3\times 0,05}{0,029}\simeq 0,517$$

Partie B

Sur cette ligne, la compagnie affrète un appareil de 200 places et a vendu 202 réservations. (on parle alors de "*sur-réservations*" ou "*sur-booking*")

On suppose que le nombre de clients se présentant à l'embarquement peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=202$ et $p=0,971$;

on note $X \rightarrow B(202;0,971)$

probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement :

$$p(X\geqslant 202)=1-p(X\leqslant 201)=1-\binom{202}{201}\times 0,971^{201}\times 0,029\simeq 0,003$$

Rque : le risque est donc de 0,3 % soit très faible ! cela explique la stratégie de "*sur-réservations*" de cette compagnie probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement :

$$p(X \geqslant 201) = 1 - p(X \leqslant 200) = 1 - \binom{202}{200} \times 0{,}971^{200} \times 0{,}029^{2} \simeq 0{,}018$$

probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation :

$$p = p(X = 201) + p(X = 202) = 0{,}0158 + 0{,}00262 = 0{,}01842$$

soit 1,8 % de risque que la compagnie soit en « *sur-booking* »

Rque : le risque paraît très faible en comparaison avec le risque inverse de perdre un « *manque à gagner* » si la compagnie n'avait proposée que 200 places

Ex 3 : Une entreprise fabrique des téléphones portables. Un test de performance est appliqué à ces téléphones, s'il est positif on dit alors que ce téléphone est "conforme" à la vente ;
On observe dans l'ensemble des points de ventes que :

- 96 % des téléphones sont "conformes"
- Un téléphone "conforme" est vendu 500 €
- Un téléphone "non conforme" est vendu 300 € (soldé)

On prélève au hasard 40 téléphones dans la production. Le volume de la production permet d'assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de téléphones "conformes" parmi les 40.

On observe que :

- Il n'existe que 2 issues possibles : « conforme » ou « non conforme »
- les choix des téléphones portables sont tous indépendants

On en déduit que X suit la loi Binomiale : $X \rightarrow B(40\,;0{,}96)$

probabilité d'avoir exactement 35 téléphones "conformes" :

$$p(X = 35) = \binom{40}{35} \times 0{,}96^{35} \times 0{,}04^{5} \simeq 0{,}016$$

probabilité d'avoir au plus 38 téléphones "conformes"

$p(X \leqslant 38) \simeq 0{,}479$ à l'aide de la calculatrice

probabilité d'avoir au moins 37 téléphones "conformes"

$p(X \geqslant 37) = 1 - p(X \leqslant 36) = 1 - 0{,}075 = 0{,}925$ à l'aide de la calculatrice

espérance mathématique de X : $E(X) = n\,p = 40 \times 0{,}96 = 38{,}4$

interprétation : En choisissant un grand nombre de téléphones portables, on « espère » obtenir 38 téléphones « conformes » sur 40

recette moyenne obtenue à partir de la vente de ces 40 téléphones portables :

$$R_{moy} = \frac{38{,}4 \times 500 + 1{,}6 \times 300}{40} = 492\,€$$