Tale MC **DM n° 9 – Intégration - *Correction*** **Avril 2021**

Ex 1 : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-4;10]$ par :
$f(x)=(x+4)e^{-0,5x}$ et on note $F(x)=(-2x-12)e^{-0,5x}$

Dérivée de f :
$f'(x)=1\times e^{-0,5x}+(x+4)(-0,5)e^{-0,5x}=(1-0,5x-2)e^{-0,5x}=(-0,5x-1)e^{-0,5x}$

Racine de la dérivée :
$f'(x)=0$ donne $(-0,5x-1)e^{-0,5x}=0$ donc $-0,5x-1=0$ car $e^{-0,5x}\neq 0$ donc $-0,5x=1$ donc $x=-2$

Signe de la dérivée :
$f'(x)>0$ donne $(-0,5x-1)e^{-0,5x}>0$ donc $-0,5x-1>0$ car $e^{-0,5x}>0$ donc $-0,5x>1$ donc $x<-2$

Tableau de variations de f :

x	-4		-2		10
signe de f'		+	0	−	
f	0	↗	5,43	↘	0,1

Primitive de f :
$F'(x)=(-2)e^{-0,5x}+(-2x-12)(-0,5)e^{-0,5x}=(-2+x+6)e^{-0,5x}$
$=(x+4)e^{-0,5x}=f(x)$

donc on vérifie bien que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4;10]$

Intégrale de f sur $[-4;10]$:
$$\int_{-4}^{10} f(x).dx=[F(x)]_{-4}^{10}=F(10)-F(-4)=-32e^{-5}-(-4)e^{2}=4e^{2}-\frac{32}{e^{5}}$$

Interprétation de l'intégrale :
L'aire comprise entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-4$ et $x=10$ vaut environ $29,34\,ua$

Ex 2 : Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0;6]$ par :
$f(x)=(x^2-2x+1)e^{-2x+6}$

Dérivée de f : $f'(x)=(-2x^2+6x-4)e^{-2x+6}$

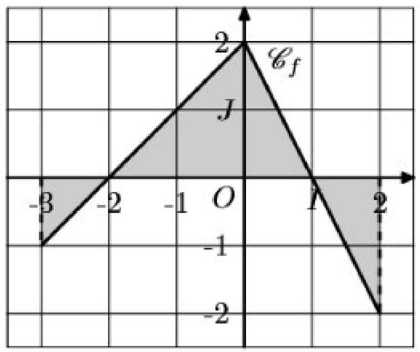
Primitive de f : $F(x)=\frac{1}{4}(-2x^2+2x-1)e^{-2x+6}$

Tableau de variations de f :

x	0		1		2		6
signe de f'		−	0	+	0	−	
f	403	↘	0	↗	7,4	↘	0,06

Intégrale de f sur $[0;6]$:
$$\int_{1}^{6} f(x).dx=[F(x)]_{1}^{6}=F(6)-F(1)=-15,25e^{-6}+0,25e^{4}$$

Interprétation de l'intégrale :
L'aire comprise entre C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-4$ et $x=10$ vaut environ $13,61\,ua$



Ex 3 : On donne la figure ci-contre
On obtient facilement : $A=0,5+3+1=4,5\,ua$

On obtient : $f(x)=\begin{cases} x+2 & sur[-3;0] \\ -2x+2 & sur[0;2] \end{cases}$

Ainsi : $F(x)=\begin{cases} 0,5x^2+2x & sur[-3;0] \\ -x^2+2x & sur[0;2] \end{cases}$

On déduit les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_{-3}^{-2} f(x).dx=[0,5x^2+2x]_{-3}^{-2}=(-2)-(-1,5)=-0,5$$

$$I_2=\int_{-2}^{0} f(x).dx=[0,5x^2+2x]_{-2}^{0}=(0)-(-2)=2$$

$$I_3=\int_{0}^{1} f(x).dx=[-x^2+2x]_{0}^{1}=(1)-(0)=1$$

$$I_4=\int_{1}^{2} f(x).dx=[-x^2+2x]_{1}^{2}=(0)-(1)=-1$$

Ainsi l'aire $\mathcal{A}$ *vaut :* $A=-I_1+I_2+I_3-I_4=4,5\,ua$