1 On considère l'équation différentielle $\frac{y'}{3}+y=x^3$ (E).

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

2 On considère l'équation différentielle $y'+5y=9\mathrm{e}^{-2x}$ (E).

Démontrer que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

3 Résoudre l'équation différentielle $y'=3y$.

4 Résoudre l'équation différentielle $2y'=-y$.

5 Résoudre l'équation différentielle $2y'=5y$.

6 Déterminer la solution *f* de l'équation différentielle $y'+2y=0$ telle que $f(0)=1$.

7 Déterminer la solution *f* de l'équation différentielle $y'=7y$ telle que $f(1)=\mathrm{e}$.

1

$\frac{y'}{3}+y=x^3$ (E)

Démontrons que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}$ est une solution particulière de (E).

Méthode : on commence par dériver *f*.

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=3x^2-2x+\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad \frac{f'(x)}{3}+f(x)&=\frac{3x^2-2x+\frac{2}{3}}{3}+x^3-x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\\&=\cancel{x^2}-\cancel{\frac{2}{3}x}+\frac{2}{9}+x^3-\cancel{x^2}+\cancel{\frac{2}{3}x}-\frac{2}{9}\\&=x^3\end{aligned}$$

Donc **la fonction *f* est une solution particulière de (E)**.

Attention à ne pas dire :
« $f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ » ou « $f(x)$ est une solution particulière de (E) »

2

$y'+5y=9\mathrm{e}^{-2x}$ (E)

Démontrons que la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

La fonction *f* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)&=3\times(-2)\,\mathrm{e}^{-2x}\\f'(x)&=-6\,\mathrm{e}^{-2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)+5f(x)&=-6\mathrm{e}^{-2x}+5\times3\mathrm{e}^{-2x}\\&=-6\mathrm{e}^{-2x}+15\mathrm{e}^{-2x}\\&=9\mathrm{e}^{-2x}\end{aligned}$$

Donc la fonction *f* est une solution particulière de (E).

3

$y'=3y$ (E)

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=3$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{3x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

N.B. : Ne pas écrire $S=\dots$

4

$2y'=-y$ (E)

(E) s'écrit $y'=-\frac{1}{2}y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-\frac{1}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

$\boxed{5}$

$2y' = 5y$ (E)

(E) s'écrit $y' = \frac{5}{2}y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = \frac{5}{2}$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{\frac{5}{2}x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{6}$

$y' + 2y = 0$ (E)

(E) s'écrit $y' = -2y$.
On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = -2$.
D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\Leftrightarrow ke^{-2\times 0} = 1 \\ &\Leftrightarrow k \times 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow k = 1 \end{aligned}$$

La fonction *f* solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}$

$\boxed{7}$

$y' = 7y$ (E)

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay$ avec $a = 7$.
D'après le théorème fondamental, les solutions de (E) sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{7x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(1) = e &\Leftrightarrow ke^{7\times 1} = e \\ &\Leftrightarrow k \times e^{7} = e \\ &\Leftrightarrow k = e^{-6} \end{aligned}$$

La fonction *f* solution de (E) vérifiant $f(1) = e$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-6} \times e^{7x}$ soit $f(x) = e^{7x-6}$.

Commentaires sur les exercices $\boxed{6}$ et $\boxed{7}$:
La résolution s'effectue en 2 étapes : recherche de la solution générale d'abord ; recherche de la solution particulière sous la forme d'une chaîne d'équivalence ; enfin conclusion.

Classification des exercices par compétences

- Comprendre ce que signifie résoudre une équation différentielle (c'est déterminer toutes les fonctions …).

- Savoir déterminer si une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.

- Savoir résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$.

- Savoir déterminer une solution d'équation différentielle du type $y' = ay$ vérifiant une condition initiale.

Ce chapitre sur les équations différentielles permet de travailler la rédaction en analyse (il est demandé d'apprendre les phrases de rédaction mot pour mot).