# Résolution d'une équation différentielle du type $(E)$ $y' + a(x)y = f(x)$ par la méthode de la variation de la constante

## Cas particuliers

L'ensemble des solutions de l'équation :

1. $(H)$ $y' = ay$ est $S_H = \{x \mapsto Ke^{ax},\ K \in \mathbb{R}\}$

2. $(E)$ $y' = ay + b$ est $S_H = \{x \mapsto Ke^{ax} - \frac{b}{a},\ K \in \mathbb{R}\}$.

On dit que $(H)$ est l'équation homogène associé à $(E)$.

## Résolution de l'équation homogène

L'équation homogène $(H)$ associée à $(E)$ est $(H)$ $y' + a(x)y = 0$.
Pour résoudre cette équation on considère une primitive $A$ de $a$.
On remarque que $A'(x) = a(x)$ et donc $e^A[y' + A'(x)y] = 0$ $(\star)$.
On pose $F(x) = e^{A(x)}y(x)$, on a alors $F'(x) = e^{A(x)}y'(x) + A'(x)y(x)$.
Ainsi $(\star) \equiv F'(x) = 0$ en intégrant l'égalité, on obtient que l'ensemble des solution de l'équation $(H)$ sont les fonctions $y_H$ telles que $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$ avec $A$ primitive de $a$ et $C \in \mathbb{R}$.
**Cas particulier :** Si a(x) =a constante, (H) devient $y' + ay = 0$, les solutions sont bien de la forme $y_H(x) = Ce^{-ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.

## Résolution de l'équation $(E)$

### Détermination d'une solution particulière

Soit on connait la forme de cette solution (voir tableau ci-dessous)
Soit on utilise la méthode de la variation de la constante, on considère $y(x) = C(x)e^{-A(x)}$ (où ici $C$ est une fonction de $x$ plus une constante).
Par conséquent, $y'(x) = C'(x)e^{-A(x)} - C(x)A'(x)e^{-A(x)}$ où $A'(x) = a(x)$
Alors $y' + ay = C'(x)e^{-A(x)} = f(x)$ i.e. $C'(x) = f(x)e^{A(x)}$ il s'agit alors de déterminer une primitive $C$ de $x \mapsto f(x)e^{A(x)}$ .
On obtient ainsi une solution particulière de l'équation $(E)$ qui est $y_p(x) = C(x)e^{-A(x)}$.

### Forme des solutions particulières dans des cas particuliers (seulement pour le cas où $y' = ay + f(x)$ où $a$ est constante)

| Si f est du type | alors il existe une solution particulière du type |
|---|---|
| $f(x) = P(x),$ P polynôme de degré n | Q polynôme de même degré que P<br>$y(x) = Q(x)$ $\quad si\ a \neq 0$<br>$y(x) = xQ(x)$ $\quad si\ a = 0$ |
| $f(x) = e^{kx}$ | $y(x) = Ae^{kx}$ $\quad si\ k \neq a$<br>$y(x) = Axe^{kx}$ $\quad si\ k = a$ |
| $f(x) = cos(wx)\ ou\ f(x) = sin(wx)$ | $y(x) = Acos(wx) + Bsin(wx)$ |
| $f(x) = P(x)e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$ | Q polynôme de même degré que P<br>$y(x) = Q(x)e^{kx}$ $\quad si\ k \neq a$<br>$y(x) = xQ(x)e^{kx}$ $\quad si\ k = a$ |
| $f(x) = k \times$ cas précédents | même forme que cas correspondant |
| $f(x) =$ somme des cas précédents | somme correspondante |

### Détermination de la forme générale de l'ensemble des solution

L'ensemble des solution de l'équation $(E)$ sont l'ensemble des fonctions $y$ telles que

$$\mathbf{y(x) = y_H(x) + y_p(x) = Ce^{-A(x)} + C(x)e^{-A(x)}\ \text{où}\ C \in \mathbb{R}}$$

# Résolution des équations du second ordre

On considère l'équation $(E)$ $ay'' + by' + cy = f$ où $a, b, c$ constantes, $a \neq 0$ et $f$ une fonction et $(H)$ $ay'' + by' + cy = O$ son équation homogène associée.
L'équation caractéristique associée à $(E)$ est $ar^2 + br + c = 0$, son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

## Solutions de l'équation homogène en fonction des solutions de l'équation caractéristique

| Signe de Δ | Solutions de l'équation caratéristique | Ensemble $S_H$ des solutions de l'équation homogène |
|---|---|---|
| $\Delta > 0$ | deux racines rééelles distinctes : $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $et$ $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $(r_1 \neq r_2)$ | $\{x \mapsto K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x},\ K_1,\ K_2 \in \mathbb{R}\}$ |
| $\Delta = 0$ | une unique racine $r_0 = -\frac{b}{2a}$ | $\{x \mapsto (K_1 x + K_2) e^{r_0 x},\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}\}$ |
| $\Delta < 0$ | deux racine complexe distinctes $r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $et$ $r_2 = \bar{r_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ | $\{x \mapsto (K_1 cos(\beta x) + K_2 sin(\beta x)) e^{\alpha x},\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}\}$ en écrivant $r_1 = \alpha + i\beta$ |

## Solutions particulière de l'équation $(E)$ dans certains cas particuliers

| Si f est du type | alors il existe une solution particulière du type |
|---|---|
| $f(x) = P(x),$ P polynôme de degré n | $Q$ polynôme degré n<br>$y(x) = Q(x)$ $si\ c \neq 0$<br>$y(x) = xQ(x)$ $si\ c = 0, b \neq 0$<br>$y(x) = x^2 Q(x)$ $si\ b = c = 0$ |
| $f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$ | $y(x) = Ae^{kx}$ $si\ k$ n'est pas solution de l'équation caractéristique<br>$y(x) = Axe^{kx}$ $si\ k$ est solution simple (cas $r_1 \neq r_2\ et\ k = r_1\ ou\ r_2$)<br>$y(x) = Ax^2e^{kx}$ $si\ k$ est solution double (cas où $r_1 = r_2 = r = k$) |
| $f(x) = e^{kx}cos(wx)\ ou\ f(x) = e^{kx}sin(wx)$<br>$ou f(x) = k_1 e^{kx} sin(wx) + k_2 e^k x cos(wx)$ | $y(x) = e^{kx}(Acos(wx) + Bsin(wx))$ $si\ k + i\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique<br>$y(x) = xe^{kx}(Acos(wx) + Bsin(wx))$ $si\ k + i\omega$ est solution de l'équation caractéristique |
| $f(x) = k \times$ cas précédent | cas correspondant |
| $f(x) =$ somme des cas précédents | somme correspondante |

## Détermination de la forme générale de l'ensemble des solution

L'ensemble des solution de l'équation $(E)$ sont l'ensemble des fonctions $y$ telles que

**$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ où $y_H$ est la solution générale de l'équation homogène (H)**

**et $y_p$ est une solution particulière de l'équation (E)**