Correction 1

Une video est accessible

La fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	-3	$-1,5$	1	3
Variation de f	$1,5$ ↘	$-1,5$ ↗	1 ↘	0

Correction 2

1. Graphiquement, on observe que l'ensemble de définition de la fonction f est :
   $\mathcal{D}_f = [-6\,;-2] \cup]-1\,;5[$.

2. a. La droite, parallèle à l'axe des abscisses, d'équation $y=3$ intercepte la courbe en deux points de coordonnées :
   $(-6\,;3)$; $(-2\,;3)$.
   Les antécédents de 3 par la fonction f sont les abscisses de ces points : c'est à dire les nombres -6 et -2.

   b.
   - La droite, parallèle à l'axe des ordonnées, d'équation $x=-3$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnée $(-3\,;-1)$.
     On en déduit que l'image de -3 est -1.
   - L'image du nombre 0 par la fonction f est l'abscisse du point obtenu par intersection de la droite d'équation $x=0$ *(l'axe des ordonnées)* et de la courbe $\mathscr{C}_f$: c'est 0.
   - La droite d'équation $x=4$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f au point de coordonnées $(4\,;2)$. On en déduit que l'image du nombre 4 est 2 :
     $f : 4 \longmapsto 2$

3. Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	-6	-4	-2	-1	0	2,5	5
Variation de f	3 ↘	-2 ↗	3 ‖	‖ -1 ↗	0 ↘	-3,5 ↗	1,5 ‖

Correction 3

Une video est accessible

1.
   - Sur l'intervalle $[-2\,;0]$, la fonction f est croissante.
   - Sur l'intervalle $[0\,;4]$, la fonction f est décroissante.
   - Sur l'intervalle $[4\,;10]$, le fonction f est croissante.

2. En utilisant le tableau de variation, on obtient les encadrements :

   a. $0 < f(1) < 8$ b. $-2 < f(6) < 0$

3. a. La fonction prend des valeurs négatives sur l'intervalle $]3\,;7[$.

   b. La fonction prend des valeurs strictement positives sur la réunion suivantes $[-2\,;3[\cup]7\,;10]$

Correction 4

Une video est accessible

1. **Faux** : car d'après le tableau de signe, on voit que tous les nombres de l'intervalle $]-3\,;5[$ ont une image négative.

2. **Vrai** : le tableau de signes nous indique que la fonction f s'annule pour les valeurs -3 et 5.

3. **Faux** : une fonction affine, non constante, étant strictement décroissante ou strictement croissante, elle ne s'annule qu'une seule fois.

4. **Vrai** : le tableau de signes indique que la fonction est strictement négative seulement sur l'intervalle $]-3\,;5[$.

5. **Faux** : d'après le tableau de signe, l'image de 0 est un nombre négatif; par contre, le point $(5\,;0)$ est un point de $\mathscr{C}_f$.

6. **On ne peut pas savoir** : le minimum de la fonction f est atteint sur l'intervalle $]-3\,;5[$ mais non-nécessairement atteint pour la valeur 1

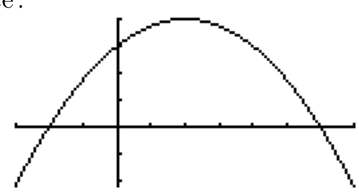
Correction 5

1. a. $f(2) = -\dfrac{1}{4}\times 2^2 + 2 + 3 = -\dfrac{1}{4}\times 4 + 5 = -1 + 5 = 4$
   L'image du nombre 2 par la fonction f est 4.

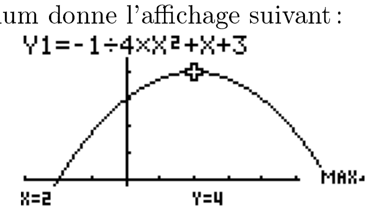
   b. $f(\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{4}\times(\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} + 3 = -\dfrac{1}{4}\times 3 + \sqrt{3} + 3$
   $= -\dfrac{3}{4} + \sqrt{3} + 3 = \dfrac{9}{4} + \sqrt{3}$

   c. $f(\sqrt{2}+1) = -\dfrac{1}{4}\times(\sqrt{2}+1)^2 + (\sqrt{2}+1) + 3$
   $= -\dfrac{1}{4}\times(2 + 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2}+1) + 3$
   $= -\dfrac{1}{4}\times(3 + 2\sqrt{2}) + \sqrt{2} + 4$
   $= -\dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + 4 = \dfrac{13}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2. a. Voici la représentation obtenue sur l'écran de la calculatrice :



   b. Les commandes de la calculatrice de recherche d'un maximum donne l'affichage suivant :



3. a. On a :

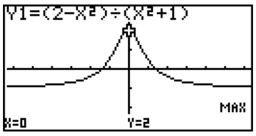
$$-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+4=-\left(\frac{1}{4}{\cdot}x^2-2{\times}\frac{1}{2}{\cdot}x{\times}1+1\right)+4$$
$$=-\frac{1}{4}{\cdot}x^2+x-1+4=-\frac{1}{4}{\cdot}x^2+x+3$$

(b.) Pour établir cette relation, nous allons utiliser le fait que le carré d'un nombre est toujours positif ou nul :
$$\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\geqslant 0$$
$$-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2\leqslant 0$$
$$-\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+4\leqslant 4$$
$$f(x)\leqslant 4$$

4. On a vu à la question 3. que la valeur de $f(x)$ ne dépasse pas 4. Il suffit maintenant pour valider l'observation de la calculatrice à la question 2. (b.) de remarquer que cette valeur est atteinte pour $x{=}2$:
$$f(2)=-\left(\frac{1}{2}\times-1\right)^2+4=-0^2+4=4$$

Correction 6

1. A l'aide de la calculatrice, on obtient le maximum :



La valeur maximale vaut 2 et elle est atteinte pour $x{=}0$.

2. (a.) On a les transformations algébriques :
$$\frac{3}{x^2+1}-1=\frac{3}{x^2+1}-\frac{x^2+1}{x^2+1}=\frac{3-\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$$
$$=\frac{3-x^2-1}{x^2+1}=\frac{2-x^2}{x^2+1}=f(x)$$

(b.) On a les comparaisons successives :
$$x^2\geqslant 0$$
$$x^2+1\geqslant 1$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$$
$$\frac{3}{x^2+1}\leqslant 3$$

(c.) De l'inégalité précédente, on obtient :
$$\frac{3}{x^2+1}\leqslant 3$$
$$\frac{3}{x^2+1}-1\leqslant 3-1$$
D'après la question 2. (a.) :
$$f(x)\leqslant 2$$
Ainsi, 2 est un majorant de la fonction f. De plus :
$$f(0)=\frac{2-0^2}{0^2+1}=\frac{2}{1}=2$$

