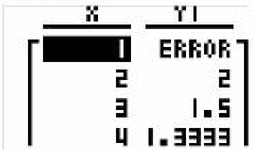
2nde 9 TD n° 2 : Les Fonctions numériques - *Correction* Avril 2021

Ex 1 : Soit $f(x)=\frac{x}{x-1}$ avec $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$



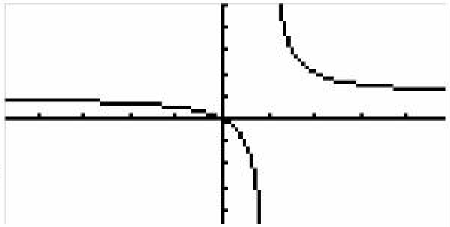
en effet $x=1$ représente une « valeur interdite »

$f(0)=\frac{0}{0-1}=0$ et $f(1{,}5)=\frac{1{,}5}{1{,}5-1}=3$

antécédent de 0 : $\frac{x}{x-1}=0$ donc $x=0$

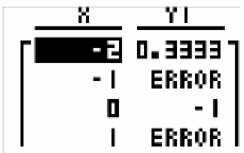
antécédent de 1 : $\frac{x}{x-1}=1$ donc

$x-1=x$ et l'équation n'a pas de solution !



Rque : C_f s'appelle une « *hyperbole* »

Ex 2 : Soit $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ avec $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$



en effet $x=1$ et $x=-1$ sont des « valeurs interdites »

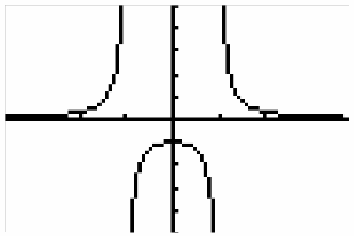
$f(-0{,}1)=\frac{1}{(-0{,}1)^2-1}=\frac{-100}{99}$ et $f(0{,}1)=\frac{-100}{99}$

$f(-10)=\frac{1}{(-10)^2-1}=\frac{1}{99}$ et $f(10)=\frac{1}{99}$

tableau de valeurs : (les valeurs sont arrondies à 0,01 près)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,07	0,13	0,33	-------	-1	-------	0,33	0,13	0,07

Graphique de f ci-contre :



on lit les antécédents de 2 :

$x\simeq-1{,}225$ ou $x\simeq1{,}225$

on calcule les antécédents de $\frac{-4}{3}$:

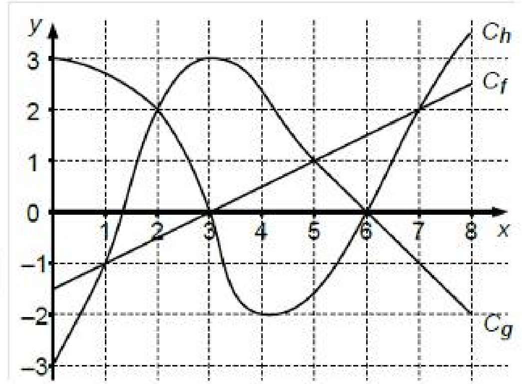
$\frac{1}{x^2-1}=\frac{-4}{3}$ donc $-4(x^2-1)=3$ donc $-4x^2+4=3$ donc $-4x^2=-1$

donc $x^2=\frac{-1}{-4}$ donc $x^2=0{,}25$ donc $x=-\sqrt{0{,}25}$ ou $x=\sqrt{0{,}25}$

donc $x=-0{,}5$ ou $x=0{,}5$

Ex 3 :

On donne le graphique ci-contre :



$f(x)\leqslant g(x)$ donne $S=[1;5]$

$g(x)\leqslant h(x)$ donne $S=[0;2]\cup[6;8]$

$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ donne $S=[1;2]$

$f(x)\geqslant g(x)\geqslant h(x)$ donne $S=[5;6]$

Ex 4 : Soit $f(x)=\frac{2}{-x+4}$ avec $x\in\mathbb{R}\setminus\{4\}$

en effet $x=4$ représente une « valeur interdite »

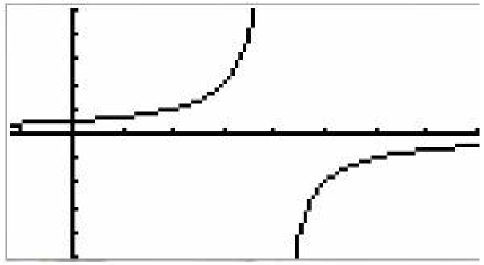
$f(0)=\frac{2}{-0+4}=0{,}5$, $f(0{,}5)=\frac{2}{-0{,}5+4}=\frac{4}{7}$ et $f\left(\frac{-1}{5}\right)=\frac{2}{0{,}2+4}=\frac{10}{21}$

antécédents de 0 : $\frac{2}{-x+4}=0$: impossible !

antécédents de 2 : $\frac{2}{-x+4}=2$ donc $2(-x+4)=2$ donc $-2x+8=2$

donc $-2x=-6$ donc $x=\frac{-6}{-2}=3$

Graphique de f ci-contre :



$f(x)=-3$ donne $\frac{2}{-x+4}=-3$

donc $-3(-x+4)=2$

donc $3x-12=2$ donc $3x=14$

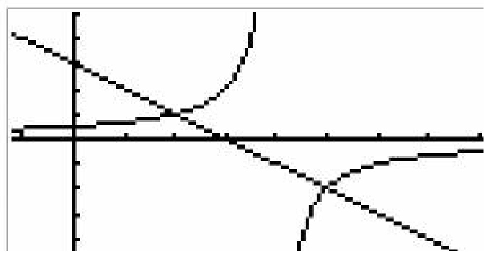
donc $x=\frac{14}{3}$ il s'agit en fait de l'antécédent de -3 par f

graphiquement on lit les solutions de l'inéquation $f(x)<-x+3$

on observe que $f(x)=-x+3$ a pour solutions : $x=2$ et $x=5$

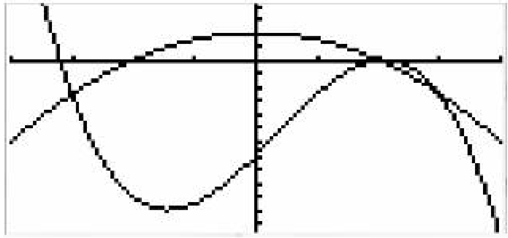
on déduit alors les solutions de l'inéquation $f(x)<-x+3$:

$S=]-\infty;2[\cup]4;5[$



Ex 5 : Soit $f(x)=(2-x)(x^2+x-7)$ et $g(x)=4-x^2$ avec $x\in[-4;4]$

On obtient le graphique :

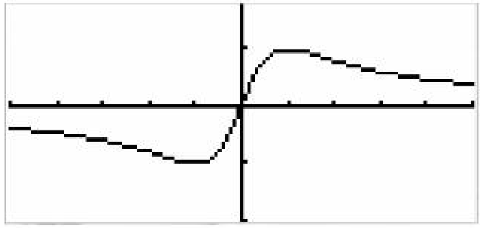


l'équation $f(x)=g(x)$ donne $S=\{-3;2;3\}$

l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$ donne $S=[-3;2]\cup[3;4]$

Ex 6 : Soit $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ avec $x\in\mathbb{R}$ (aucune « valeur interdite »)

On obtient le graphique :



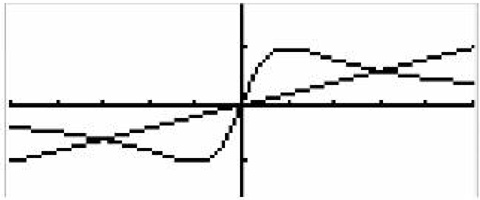
$f(0)=\dfrac{2\times 0}{0^2+1}=0$, $f(1)=\dfrac{2\times 1}{1^2+1}=1$

antécédents de 0 : $\dfrac{2x}{x^2+1}=0$

donc $2x=0$ donc $x=0$

antécédents de 1 : $\dfrac{2x}{x^2+1}=1$ donc $x^2+1=2x$ donc $x^2-2x+1=0$

donc $(x-1)^2=0$ donc $x=1$



l'équation $f(x)=\dfrac{x}{5}$ donne graphiquement $S=\{-3;0;3\}$

l'inéquation $f(x)>\dfrac{x}{5}$ donne graphiquement $S=]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$

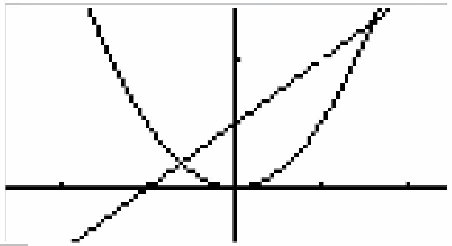
on observe que f admet un minimum global en -1 (pour $x=-1$) et un maximum global en 1 (pour $x=1$) ;

on en déduit l'encadrement : $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$

Ex 7 : Soit $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$ avec $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (1 est la « valeur interdite »)

Soit $g(x)=x^2$ avec $x\in\mathbb{R}$ (aucune « valeur interdite »)

graphiques de f et g :



On remarque un détail sur le graphique de f ... *observez bien* !

Il s'agit d'une fonction affine avec un « blanc » en $x=1$

l'équation $f(x)=2$ donne $\dfrac{1-x^2}{1-x}=2$ donc $1-x^2=2(1-x)$

donc $(1-x)(1+x)=2(1-x)$ donc $1+x=2$ donc $x=1$

or 1 est une valeur interdite ! Donc en fait $S=\varnothing$

l'inéquation $f(x)>g(x)$ donne graphiquement $S=]-0{,}6;1[\cup]1;1{,}6[$

Ex 8 : Soit $f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^2-3$ avec $x\in\mathbb{R}^*$ (0 est la « valeur interdite »)

$f(-1)=(1+\dfrac{1}{-1})^2-3=-3$; $f(0{,}5)=(1+\dfrac{1}{0{,}5})^2-3=6$;

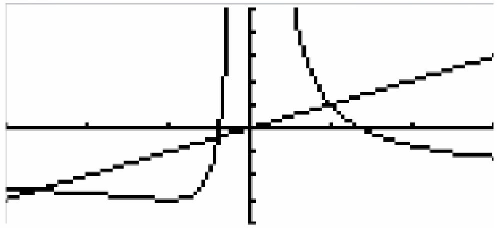
$f(\dfrac{-5}{3})=(1-\dfrac{3}{5})^2-3=-2{,}84$ (l'inverse de $\dfrac{-5}{3}$ est $\dfrac{-3}{5}$)

par ailleurs $f(2)=(1+\dfrac{1}{2})^{-3}=\dfrac{-3}{4}$ donc 2 est un antécédent de $\dfrac{-3}{4}$

de même $f(-1)=-3$ donc $A(-1;-3)\in C_f$ (voir COURS)

de plus $f(\dfrac{3}{4})=(1+\dfrac{4}{3})^2-3=\dfrac{22}{9}\neq 2{,}44$ donc $B(\dfrac{3}{4};2{,}44)\notin C_f$

On obtient le graphique ci-contre avec la fonction $g(x)=x$ (fonction linéaire)



ainsi l'inéquation $f(x)>x$ donne graphiquement :

$S=]-\infty;-2{,}6[\cup]-0{,}4;0[\cup]0;1[$

Ex 9 : cet exercice sera laissé comme un « *DM facultatif* »
la correction sera donc déposée ultérieurement ...