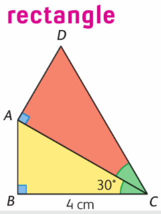
A Calculer des longueurs dans un triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en *B* et *ACD* est un triangle rectangle en *A*.
On donne $BC = 4$ cm et $\widehat{ACB} = 30°$. De plus, on sait que la droite (*AC*) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$.

1. Calculer la longueur *AC* arrondie au millimètre.
2. Calculer la longueur *AD* arrondie au millimètre.

voir mémento de géométrie



11 Trouver l'intrus

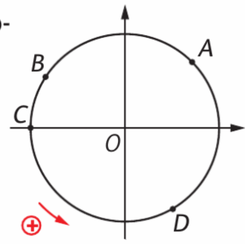
Dans chaque cas, trois des quatre réels proposés sont associés au même point du cercle trigonométrique. Trouver l'intrus et positionner sur le cercle trigonométrique le point associé aux trois autres nombres.

a.	0	8π	-3π	-16π
b.	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-13\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$
c.	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-34\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{28\pi}{6}$

12 On a placé sur le cercle trigonométrique quatre points :

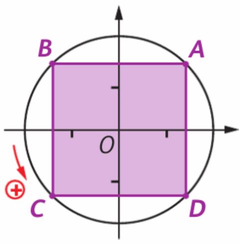
A associé à $\frac{\pi}{4}$, *B* associé à $\frac{5\pi}{6}$,

C associé à π et *D* associé à $\frac{-\pi}{3}$.



Donner, dans chaque cas, quatre autres nombres réels auxquels le point est associé, deux positifs et deux négatifs.

13 On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé (*O*, *I*, *J*).
ABCD est un carré dont les côtés sont parallèles aux axes du repère.



1. Déterminer un réel associé à chacun des sommets du carré.
2. Déterminer la longueur du petit arc de cercle limité par les points *A* et *B*.

16 On considère un réel $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

1. En utilisant la relation fondamentale, calculer sin *x*.
2. Calculer tan *x*.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de *x* arrondie au centième.

17 Calcul mental

On considère un réel $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Calculer sin *x* sachant que $\cos x = \frac{1}{2}$.

2. Calculer cos *x* sachant que $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

19 Dans chaque cas, examiner si les réels donnés sont associés au même point du cercle trigonométrique.

1. $a = \frac{\pi}{2}$; $b = \frac{21\pi}{2}$.

2. $a = \frac{\pi}{3}$; $b = \frac{41\pi}{3}$.

3. $a = -\frac{\pi}{6}$; $b = \frac{23\pi}{6}$.

4. $a = \frac{2\pi}{3}$; $b = -\frac{10\pi}{3}$.

20 10' Dans chaque cas, examiner si les réels donnés sont associés au même point du cercle trigonométrique.

1. $a = \pi$; $b = 2017\pi$.

2. $a = -\frac{31\pi}{3}$; $b = \frac{81\pi}{3}$.

3. $a = \frac{35\pi}{6}$; $b = -\frac{\pi}{6}$.

4. $a = \frac{23\pi}{5}$; $b = \frac{108\pi}{5}$.

21 Déterminer, dans chaque cas, l'unique réel appartenant à l'intervalle $[2012\pi\,;2014\pi[$ qui est associé au même point que les réels suivants :

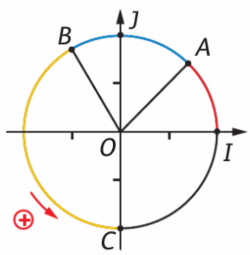
a. $\frac{\pi}{2}$; **b.** $\frac{\pi}{5}$; **c.** $-\frac{2\pi}{3}$; **d.** $-\frac{\pi}{12}$.

22 Dans chaque cas, déterminer l'unique nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ associé au même point du cercle trigonométrique que le nombre donné :

$a = \frac{100\pi}{3}$; $b = 2010\pi$; $c = \frac{41\pi}{4}$;

$d = 29\pi$; $e = -\frac{11\pi}{2}$; $f = -\frac{41\pi}{4}$.

23 Le cercle trigonométrique est associé au repère orthonormé (*O*, *I*, *J*). On considère les points *A*, *B* et *C* associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$.



Calculer les longueurs des arcs de cercle suivants :
a. l'arc limité par *I* et *A* coloré en rouge ;
b. l'arc limité par *A* et *B* coloré en bleu ;
c. l'arc limité par *B* et *C* coloré en orange.

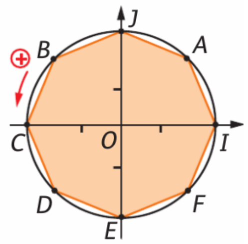
24 **1.** Construire à la règle et au compas les points A, B et C du cercle trigonométrique associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$.

2. Calculer les longueurs des petits arcs de cercle limités par A et B d'une part, puis par C et A d'autre part.

25 **1.** Construire à la règle et au compas les points R, S et T du cercle trigonométrique associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$.

2. Calculer la longueur du petit arc de cercle limité par S et T.

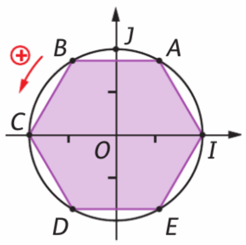
26 On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé (O, I, J) et l'octogone régulier $IAJBCDEF$ inscrit dans le cercle.



1. À quels réels de l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ les points A, B et F sont-ils associés ?

2. À quels sommets de l'octogone les réels $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{11\pi}{4}$ sont-ils associés ?

27 On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé (O, I, J) et l'hexagone régulier $IABCDE$ inscrit dans le cercle.



À quel nombre de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ chaque sommet de l'hexagone correspond-il ?

30 **LOGIQUE** **Toujours faux !**

Dans chaque cas, utiliser un contre-exemple pour montrer que les affirmations suivantes sont fausses.

1. Si $x \leqslant y$, alors $\sin x \leqslant \sin y$.

2. Pour tout réel x, on a $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

3. Si $\cos a = \cos b$, alors $a = b$.

4. Si $x \leqslant 0$, alors $\sin x \leqslant 0$.

5. Si $x \in [0 ; \pi]$, alors $\cos x \geqslant 0$.

31 **Vrai ou faux ?**

Préciser dans chaque cas si l'affirmation est vraie ou fausse.

1. $\cos(2\pi) = 2 \times \cos \pi$.

2. Si $\cos x = \frac{1}{2}$, alors $\sin x = \frac{1}{2}$.

3. $\cos(2\pi) = \cos 0$.

4. $\sin(1{,}99\pi) < 0$.

5. $\cos(0{,}51\pi) < 0$.

33 x est un réel appartenant à l'intervalle $[10\pi ; 12\pi[$ et l'on donne $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$.

Déterminer le nombre réel x.

34 x est un réel appartenant à l'intervalle $[16\pi ; 18\pi]$ et l'on donne $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

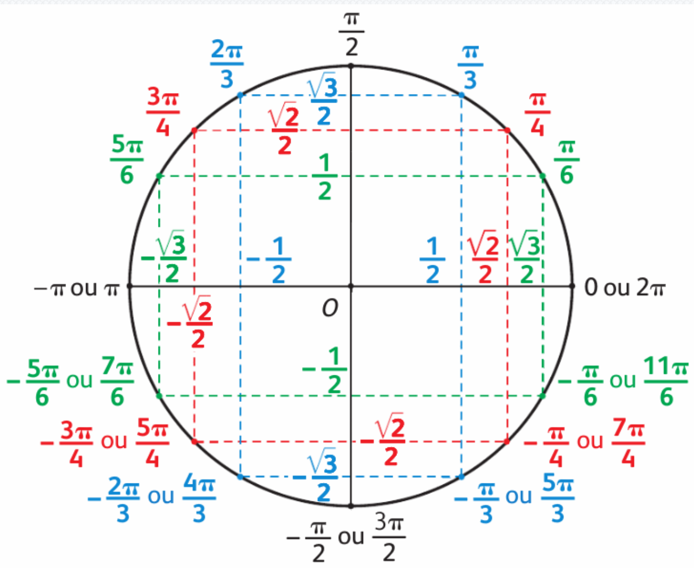
Déterminer le nombre réel x.

35 Lire sur le graphique ci-après les valeurs exactes de :

a. $\cos\frac{3\pi}{4}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$; $\cos\frac{4\pi}{3}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

b. $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}$.

c. $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.



36 **1.** À l'aide du graphique donnant les valeurs remarquables ci-dessus, comparer les cosinus et sinus de :

a. $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$; **b.** $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$; **c.** $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$;

d. $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$; **e.** $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$.

2. a. D'un point de vue géométrique, comment sont situés l'un par rapport à l'autre les points M et N associés respectivement aux réels x et $-x$?

b. Que peut-on dire alors des abscisses de ces points ? des ordonnées de ces points ?

3. Conclure en recopiant et en complétant les deux égalités suivantes :

Pour tout nombre réel x, $\cos(-x) = \ldots$

Pour tout nombre réel x, $\sin(-x) = \ldots$

37 À l'aide du graphique ci-dessus, et **sans utiliser la calculatrice**, effectuer les calculs suivants :

a. $\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6}$;

b. $\sin\frac{\pi}{4} - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

c. $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6}$.

40 $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ avec $x \in [0\,;2\pi]$.

41 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ avec $x \in [0\,;\pi]$.

42 $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ avec $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

44 Démontrer que, pour tout réel x, on a l'égalité :
$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$.

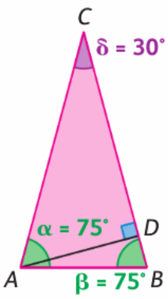
45 Démontrer que pour tout réel x tel que $\tan x$ existe, on a l'égalité $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

46 Démontrer que, pour tout réel x, on a l'égalité :
$(\cos x)^4 - (\sin x)^4 = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$.

47 Exercice guidé

Calculs des valeurs exactes de $\sin\dfrac{\pi}{12}$ et $\cos\dfrac{\pi}{12}$

ABC est un triangle isocèle en C tel que $\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 75^\circ$ et $CA = CB = a$.
La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe (BC) en D.



1. Démontrer que $AD = \dfrac{a}{2}$.

2. Démontrer que $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
En déduire l'expression de DB en fonction de a.

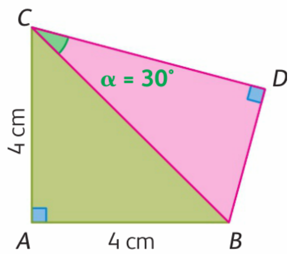
3. Démontrer que $AB = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

4. Calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{DAB}$.

5. Calculer les valeurs exactes de $\cos 15^\circ$ et $\sin 15^\circ$.

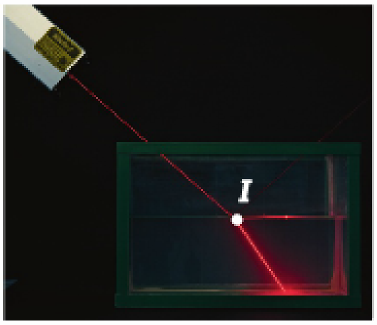
6. Quel réel correspond à un angle intercepté sur le cercle trigonométrique de mesure 15° ? Conclure.

49 On considère la figure suivante formée du triangle ABC rectangle et isocèle en A, avec $AB = AC = 4$ cm et du triangle BCD rectangle en D avec $\widehat{BCD} = 30^\circ$.
Calculer la longueur exacte du côté $[CD]$.

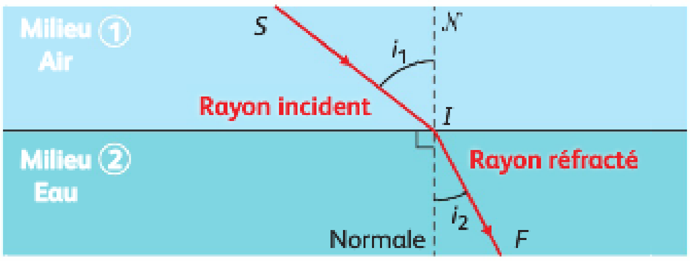


50 En lien avec la physique

Une loi de Schnell-Descartes



Lorsque la lumière passe de l'air dans l'eau ou dans un autre milieu transparent et homogène, elle change de direction. Le rayon lumineux est dévié par rapport à sa trajectoire dans l'air, on dit qu'il est réfracté. Une loi modélise ce phénomène, c'est la loi de Schnell-Descartes.



On appelle **normale** (notée $\mathcal{N}$ sur le dessin ci-dessus) la droite perpendiculaire en un point I à la surface de séparation des deux milieux, i_1 l'angle d'incidence entre le rayon incident et la normale, i_2 l'angle de réfraction entre le rayon réfracté et la normale.
On a la relation :

$$n_1 \times \sin i_1 = n_2 \times \sin i_2$$

où n_1 est l'indice de réfraction du milieu 1, et n_2 est l'indice de réfraction du milieu 2.

1. On suppose que le milieu 1 est l'air, d'indice de réfraction $n_1 = 1$ et le milieu 2 est l'eau, d'indice de réfraction $n_2 = 1{,}33$.