**T MC — TD n° 2 : Calcul intégral - *Correction* — Avril 2021**

### *Ex 1 : Encadrer une intégrale de GAUSS*

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=e^{x^2}$

On sait que la fonction *exponentielle* est croissante sur $[0;1]$ ainsi :
$x\in[0;1]$ donc $0\leqslant x^2\leqslant 1$ donc $e^0\leqslant e^{x^2}\leqslant e^1$ donc $1\leqslant f(x)\leqslant e$

on intègre alors ces 3 fonctions sur l'intervalle $[0;1]$

$$\int_0^1 1.dx\leqslant\int_0^1 f(x).dx\leqslant\int_0^1 e.dx \quad\text{donc}\quad [x]_0^1\leqslant I\leqslant[ex]_0^1 \quad\text{donc}\quad 1\leqslant I\leqslant e$$

<u>*rque*</u> : la valeur approchée est : $I\simeq 1{,}463$

### *Ex 2 : Encadrer une intégrale de RIEMANN*

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\sqrt{1+x}$

Il est clair que $f$ est croissante sur $[0;8]$ ainsi :
$x\in[0;8]$ donc $1\leqslant x+1\leqslant 9$ donc $1\leqslant\sqrt{x+1}\leqslant 3$

on intègre alors ces 3 fonctions sur l'intervalle $[0;8]$

$$\int_0^8 1.dx\leqslant\int_0^1 f(x).dx\leqslant\int_0^8 3.dx \quad\text{donc}\quad [x]_0^8\leqslant I\leqslant[3x]_0^8 \quad\text{donc}\quad 8\leqslant I\leqslant 24$$

<u>*rque*</u> : la valeur approchée est : $I\simeq 17{,}33$

### *Ex 3 : Encadrer une intégrale de WALLIS*

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\sqrt{9+x^2}$

on a $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ donc $f'(x)\geqslant 0$ sur $[0;4]$

donc $f$ est croissante sur $[0;4]$ ainsi :
$x\in[0;4]$ donc $9\leqslant x^2+9\leqslant 25$ donc $3\leqslant\sqrt{x^2+9}\leqslant 5$

on intègre alors ces 3 fonctions sur l'intervalle $[0;4]$

$$\int_0^4 1.dx\leqslant\int_0^4 f(x).dx\leqslant\int_0^4 5.dx \quad\text{donc}\quad [x]_0^4\leqslant I\leqslant[5x]_0^4 \quad\text{donc}\quad 4\leqslant I\leqslant 20$$

<u>*rque*</u> : la valeur approchée est : $I\simeq 14{,}94$

### *Ex 4 : Valeur moyenne & estimation graphique*

On a représenté ci-dessous la fonction $f$ définie sur $[0;4]$ par

$f(x)=0{,}5x^3-4x^2+8x+1$ donc $F(x)=\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{4x^3}{3}+4x^2+x$

la valeur moyenne de $f$ sur $[0;4]$ est environ $\mu\simeq 4$

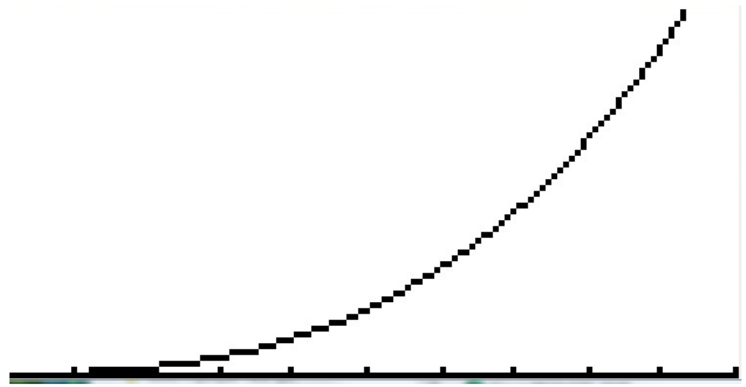
on a : $\mu=\dfrac{1}{4-0}\times\displaystyle\int_0^4 f(x).dx=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{4x^3}{3}+4x^2+x\right]_0^4=\dfrac{11}{3}$

### *Ex 5 : Équations horaires du mouvement*

Un mobile $M(t)$ se déplace à la vitesse $v(t)=3t^2+4t+1$
( $t$ en seconde et $v(t)$ en $m.s^{-1}$ ) ; sa position initiale est $M(0;2)$

position $x(t)$ du mobile $M(t)$ : $x(t)=\int v(t).dt$
donc $x(t)=t^3+2t^2+t+x_0$ et sa position initiale est $M(0;2)$
d'où on déduit : $x(t)=t^3+2t^2+t+2$

la trajectoire parcourue du mobile $M$ est donnée ci-dessous :



vitesse instantanée sur le trajet aux instants $t=1\,min$ et $t=2\,min$

on a : $v(1)=8\,m.s^{-1}$ et $v(2)=21\,m.s^{-1}$

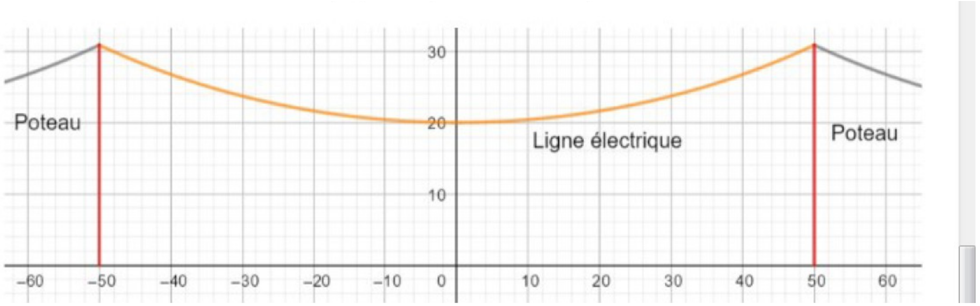
vitesse moyenne sur le trajet entre les instants $t=0\,s$ et $t=2\,min$

$$v_{moy}=\frac{x(2)-x(1)}{2-1}=\frac{20-6}{2-1}=14\,m.s^{-1}$$

***Ex 6** : ligne électrique → vers le cosinus hyperbolique*

La hauteur d'une ligne électrique entre deux poteaux longue de 100 m est modélisée, par la fonction $h$ définie sur $[-50{,}50]$ par :

$$h(x)=10(e^{0{,}02x}+e^{-0{,}02x})$$




on a $h'(x)=10(0{,}02\,e^{0{,}02x}-0{,}02\,e^{-0{,}02x})=0{,}2(e^{0{,}02x}-e^{-0{,}02x})$

$h'(x)=0$ donne $e^{0{,}02x}=e^{-0{,}02x}$ donc $0{,}02\,x=-0{,}02\,x$ donc $x=0$

$h'(x)>0$ donne $e^{0{,}02x}>e^{-0{,}02x}$ donc $0{,}02\,x>-0{,}02\,x$ donc $x>0$

on en déduit le tableau de variations de $h$ sur $[-50{,}50]$

| $x$ | -50 | | 0 | | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $h'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h$ | 31 | ↘ | 20 | ↗ | 31 |

Une primitive de $h$ sur $[-50{,}50]$ est :

$$H(x)=10\left(\frac{e^{0{,}02x}}{0{,}02}+\frac{e^{-0{,}02x}}{-0{,}02}\right)=500\left(e^{0{,}02x}-e^{-0{,}02x}\right)$$

la hauteur moyenne de la ligne électrique est :

$$\mu=\frac{1}{100}\times\int_{-50}^{50} h(x).dx=[5(e^{0{,}02x}-e^{-0{,}02x})]_{-50}^{50}\simeq 23{,}5$$

la hauteur moyenne de la ligne électrique est donc de 23,50 m

*rque* : cette hauteur moyenne est utile afin de calculer l'effet joule global perdu sur des lignes de basses tensions

***Ex 7** : Décomposition en éléments simples*

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;5]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

on a $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ or $x+1>0$ sur $[0;5]$ et $x+2>0$ sur $[0;5]$ donc on en déduit que $f(x)>0$ sur $[0;5]$

de plus $(x+1)(x+2)\neq 0$ sur $[0;5]$ donc $f$ ne possède aucune « valeur interdite » sur $[0;5]$ donc $f$ est continue sur $[0;5]$

on pose $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ on cherche alors à déterminer $a$ et $b$ :

***Méthode 1*** : $f(x)=\dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+(2a+b)}{x^2+3x+2}$

par identification avec $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ on obtient le système

$$\begin{cases}a+b=0\\2a+b=1\end{cases}\ \text{donc}\ \begin{cases}b=-a\\2a+b=1\end{cases}\ \text{donc}\ \begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\ \text{donc}\ f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

***Méthode 2*** : $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ donc $\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

donc $\dfrac{1}{x+2}=a+\dfrac{b(x+1)}{x+2}$ avec $x=-1$ on obtient $a=1$

aussi $\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{a(x+2)}{x+1}+b$ avec $x=-2$ on obtient $b=-1$

donc on en déduit que $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

on en déduit une une primitive $F$ de $f$ :

$$F(x)=\ln|x+1|-\ln|x+2|=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$$

valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx=[F(x)]_0^5=\ln\left(\frac{6}{7}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{12}{7}\right)\simeq 0{,}54$