Lois de probabilité à densité – Exercices

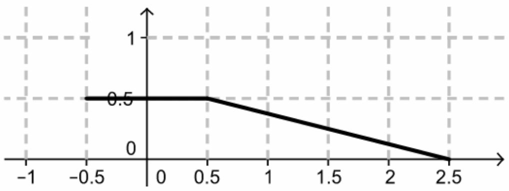
Loi à densité

3 Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

1. Représenter graphiquement f.
2. Soit X une variable aléatoire dont la densité est f. Calculer
   - **a.** $P(X < 0{,}3)$ **b.** $P\left(X > \frac{3}{4}\right)$
   - **c.** $P(0{,}2 < X < 0{,}7)$ **d.** $E(X)$

4 La courbe ci-dessous représente la densité f d'une variable aléatoire à valeurs dans $[-0{,}5;2{,}5]$.

1. S'assurer que f est une densité.
2. Calculer
   - **a.** $P(X > 0)$ **b.** $P(-1 \leq X < 0{,}5)$
   - **c.** $P(X \geq 0{,}5)$ **d.** $P(1 \leq X < 1{,}5)$
3. Montrer que $E(X) = \frac{7}{12}$.



5 Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2}{x^2}.$$

On admet que f est une densité. Soit X une variable aléatoire de densité f. Calculer

a. $P(X = 10)$ **b.** $P(X < 10)$ **c.** $P(X > 10)$
d. $P(4 \leq X \leq 5)$ **e.** $P(X < 1)$

6 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1) \text{ si } -1 \leq x < 1 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f et vérifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   - **a.** Calculer la probabilité que X prenne ses valeurs dans l'intervalle $[-1;0]$.
   - **b.** Calculer $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$.

Loi exponentielle

10 La durée de vie T, exprimée en jours, d'un composant est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}005$.

1. Calculer à 10^{-3} près la probabilité des événements suivants :
   - **a.** la durée de vie dépasse 300 jours ;
   - **b.** la durée de vie est d'au plus une année ;
   - **c.** la durée de vie est comprise entre 1 et 2 ans.

12 Le temps de réponse T, exprimée en seconde, à un terminal commandé par un ordinateur est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ telle que $P(T \geq 3) = 0{,}452$.

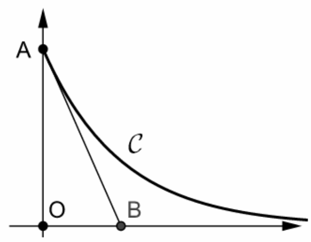
1. Le temps de réponse dépasse 2 secondes. Quelle est la probabilité qu'il dépasse 5 secondes ?
2. Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, que ce temps de réponse ne dépasse pas 5 secondes.

11 La durée de vie T, exprimée en année, d'un composant est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Une étude statistique a permis d'estimer que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1. Calculer λ à 10^{-3} près.
2. Calculer à 10^{-3} près la probabilité qu'un composant de ce type dure :
   - **a.** moins de 8 ans ;
   - **b.** plus de 10 ans ;
   - **c.** entre 3 et 5 ans
   - **d.** au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de 3 ans.

14 **(Désintégration radioactive).** En physique, on considère que la durée de vie totale T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit une loi exponentielle de paramètre λ. Ce réel λ est appelé constante radioactive de l'élément étudié.

1. On suppose qu'à l'instant initial, l'échantillon radioactif contient N_0 noyau actifs. Justifier que le nombre moyen d'éléments présents à l'instant t est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.
2. La demi-vie d'un élément radioactif est la durée notée $t_{1/2}$ telle que $P\left(T \leq t_{1/2}\right) = P\left(T > t_{1/2}\right)$.
   - **a.** Montrer que $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Vérifier que la demi-vie correspond au temps nécessaire pour que la moitié des noyaux d'un échantillon se soient désintégrés.
   - **b.** Après deux demi-vies, quel est le nombre moyen d'atomes non désintégrés ?
3. La durée de vie moyenne, notée τ, d'un élément radioactif est l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire de la durée de vie T.
   - **a.** Exprimer τ en fonction de λ. Justifier l'approximation utilisée en physique : $\tau \approx 1{,}44 t_{1/2}$.
   - **b.** Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la densité f d'une loi exponentielle de paramètre λ. La tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en B. Montrer que l'abscisse de B est τ.



4. Applications.
   - **a.** Le technétium 99m (^{99m}Tc) a une demi-vie de 6 heures. Calculer sa constante radioactive.
   - **b.** Calculer à 10^{-3} près la probabilité d'un atome de ^{99m}Tc se désintègre :
     - **i.** avant 4 heures ; **ii.** après 10 heures.
   - **c.** À partir de quelle durée de vie peut-on considérer que la probabilité qu'un atome de ^{99m}Tc se désintègre est supérieure à 0,95 ?
   - **d.** La demi-vie du carbone 14 est estimé à 5568 ans.
     - **i.** Calculer $P(X < 1000)$.
     - **ii.** Déterminer, à un an près, le plus petit temps tel que $P(X < x) = 0{,}2$.