Correction 1

Une video est accessible

1. Les deux droites (d_1) et (d_2) admettent pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont les coordonnées sont : $\overrightarrow{u}(1\,;2)$; $\overrightarrow{v}(4\,;8)$

   Le déterminant du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour valeur :
   $x{\cdot}y' - x'{\cdot}y = 1{\times}8 - 4{\times}2 = 8 - 8 = 0$

   Le critère de colinéarité permet d'affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires : les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.

2. Les deux droites (Δ_1) et (Δ_2) admettent pour vecteurs normaux respectivement $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont les coordonnées sont : $\overrightarrow{u}(4\,;3)$; $\overrightarrow{v}(-6\,;8)$

   Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ a pour valeur :
   $x{\cdot}x' + y{\cdot}y' = 4{\times}(-6) + 3{\times}8 = -24 + 24 = 0$

   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux : les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont perpendiculaires.

Correction 2

1.
   - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
     $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,; y_B - y_A) = (3-(-3)\,;5-2)$
     $= (3+3\,;3) = (6\,;3)$
   - La hauteur (d) du triangle ABC issue du sommet C admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal.
     On en déduit qu'elle admet pour équation cartésienne :
     $6{\cdot}x + 3{\cdot}y + c = 0 \quad c{\in}\mathbb{R}.$
     Le point C appartenant à la hauteur (d), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (d) :
     $$\begin{aligned} 6{\cdot}x_C + 3{\cdot}y_C + c &= 0\\ 6{\times}2 + 3{\times}2 + c &= 0\\ 12 + 6 + c &= 0\\ 18 + c &= 0\\ c &= -18 \end{aligned}$$
     La droite (d) admet pour équation cartésienne :
     $6{\cdot}x + 3{\cdot}y - 18 = 0$
   - Le vecteur $\overrightarrow{u}(-3\,;6)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ car :
     $\overrightarrow{u}{\cdot}\overrightarrow{AB} = -3{\times}6 + 6{\times}3 = -18 + 18 = 0$
   - Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant normal à la droite (AB), on en déduit qu'elle admet l'équation cartésienne :
     $-3{\cdot}x + 6{\cdot}y + c = 0 \quad$ où $c{\in}\mathbb{R}$.
     Le point A appartenant à la droite (AB), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de cette droite :
     $$\begin{aligned} -3{\cdot}x_A + 6{\cdot}x_B + c &= 0\\ -3{\times}(-3) + 6{\times}2 + c &= 0\\ 9 + 12 + c &= 0\\ 21 + c &= 0\\ c &= -21 \end{aligned}$$
     La droite (AB) admet pour équation cartésienne :
     $-3{\cdot}x + 6{\cdot}y - 21 = 0$
   - Le pied H de la hauteur (d) est le point d'intersection des droites (d) et (AB). Ses coordonnées sont les solutions du système d'équations :
     $$\begin{cases} 6{\cdot}x + 3{\cdot}y - 18 = 0\\ -3{\cdot}x + 6{\cdot}y - 21 = 0 \end{cases}$$
     $$\Longrightarrow \begin{cases} 6{\cdot}x + 3{\cdot}y - 18 = 0\\ -6{\cdot}x + 12{\cdot}y - 42 = 0 \end{cases}$$
     Par addition membre à membre de ces deux équations :
     $$\begin{aligned} 3{\cdot}y + 12{\cdot}y - 18 - 42 &= 0\\ 15{\cdot}y - 60 &= 0\\ 15{\cdot}y &= 60\\ y &= \frac{60}{15}\\ y &= 4 \end{aligned}$$
     En utilisant la première équation :
     $$\begin{aligned} 6{\cdot}x + 3{\cdot}y - 18 &= 0\\ 6{\cdot}x + 3{\times}4 - 18 &= 0\\ 6{\cdot}x + 12 - 18 &= 0\\ 6{\cdot}x - 6 &= 0\\ 6{\cdot}x &= 6\\ x &= \frac{6}{6}\\ x &= 1 \end{aligned}$$
     Le point H a pour coordonnées : $H(1\,;4)$

2. On a les longueurs :
   - $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$
     $= \sqrt{\left[3-(-3)\right]^2 + \left(5-2\right)^2} = \sqrt{\left(3+3\right)^2 + 3^2}$
     $= \sqrt{6^2 + 9} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}$
   - $CH = \sqrt{\left(x_H - x_C\right)^2 + \left(y_H - y_C\right)^2}$
     $= \sqrt{\left(1-2\right)^2 + \left(4-2\right)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2}$
     $= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

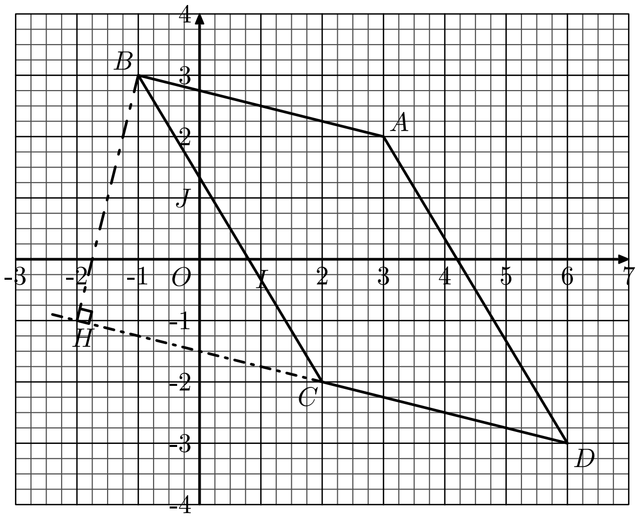
   On en déduit que l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC :
   $$\mathcal{A} = \frac{AB{\times}CH}{2} = \frac{\sqrt{45}{\times}\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{45{\times}5}}{2} = \frac{\sqrt{225}}{2}$$
   $$= \frac{\sqrt{15^2}}{2} = \frac{15}{2}$$

Correction 3

1. On a les coordonnées des vecteurs :
   - $\overrightarrow{AB}(x_B{-}x_A\,; y_B{-}y_A) = (-1{-}3\,;3{-}2) = (-4\,;1)$
   - $\overrightarrow{DC}(x_C{-}x_D\,; y_C{-}y_D) = (2{-}6\,;-2{-}(-3))$
     $= (-4\,;-2+3) = (-4\,;1)$

   On en déduit que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
   Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Notons H le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).



- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à la droite (BH). Ainsi, la droite (BH) admet pour équation cartésienne :
  $-4{\cdot}x+y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$
  Le point B appartenant à la droite (BH), ses coordonnées vérifient cette équation cartésienne :
  $$-4{\cdot}x_B+y_B+c=0$$
  $$-4\times(-1)+3+c=0$$
  $$4+3+c=0$$
  $$7+c=0$$
  $$c=-7$$
  La droite (BH) a pour équation cartésienne :
  $-4{\cdot}x+y-7=0$
- Le vecteur $\vec{u}(1\,;4)$ est un vecteur normal à la droite (CD) car :
  $\vec{u}\cdot\overrightarrow{DC}=1\times(-4)+4\times1=-4+4=0$
  Ainsi, la droite (CD) admet pour équation cartésienne :
  $x+4{\cdot}y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$
  Le point C appartenant à la droite (CD), ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne :
  $$x_C+4{\cdot}y_C+c=0$$
  $$2+4\times(-2)+c=0$$
  $$2-8+c=0$$
  $$-6+c=0$$
  $$c=6$$
  La droite (CD) admet pour équation cartésienne :
  $x+4{\cdot}y+6=0$
- Le point H est le point d'intersection des droites (CD) et (BH). On en déduit que le point H a ses coordonnées qui sont solution du système d'équations :
  $$\begin{cases} -4{\cdot}x+y-7=0 \\ x+4{\cdot}y+6=0 \end{cases}$$
  $$\Longrightarrow \begin{cases} -4{\cdot}x+y-7=0 \\ -4{\cdot}x-16{\cdot}y-24=0 \end{cases}$$
  Par soustraction membre à membre des deux équations, on a :
  $$y-(-16{\cdot}y)-7-(-24)=0$$
  $$y+16{\cdot}y-7+24=0$$
  $$17{\cdot}y+17=0$$
  $$17{\cdot}y=-17$$
  $$y=\frac{-17}{17}$$
  $$y=-1$$
  En utilisant la seconde équation, on a :
  $$x+4{\cdot}y+6=0$$
  $$x+4\times(-1)+6=0$$
  $$x-4+6=0$$
  $$x+2=0$$
  $$x=-2$$
  Le point H a pour coordonnées : $H(-2\,;-1)$
- On a les longueurs :
  - $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+1^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$
  - $BH=\sqrt{(x_H-x_B)^2+(y_H-y_B)^2}$
    $=\sqrt{[-2-(-1)]^2+(-1-3)^2}$
    $=\sqrt{(-2+1)^2+(-4)^2}=\sqrt{(-1)^2+16}$
    $=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

  Le parallélogramme $ABCD$ a pour aire :
  $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\times BH=\sqrt{17}\times\sqrt{17}=17$

Correction 4

- En utilisant la formule du cours, le cercle $\mathscr{C}$ admet pour équation cartésienne :
$$x^2+y^2+(-2{\cdot}x_A){\cdot}x+(-2{\cdot}y_A){\cdot}y+({x_A}^2+{y_A}^2-r^23)=0$$
$$x^2+y^2+(-2\times2){\cdot}x+(-2\times1){\cdot}y+(2^2+1^2-4^2)=0$$
$$x^2+y^2-4{\cdot}x-2{\cdot}y+(4+1-16)=0$$
$$x^2+y^2-4{\cdot}x-2{\cdot}y-11=0$$
- En retrouvant cette équation cartésienne par la définition d'un cercle :
  Soit $M(x\,;y)$ un point du cercle $\mathscr{C}$. Le point M est à une distance de 4 du centre A :
  $$AM=4$$
  $$AM^2=4^2$$
  $$\Big[\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}\Big]^2=16$$
  $$(x-2)^2+(y-1)^2=16$$
  $$x^2-4{\cdot}x+4+y^2-2{\cdot}y+1-16=0$$
  $$x^2+y^2-4{\cdot}x-2{\cdot}y-11=06$$

Correction 5

1. a.
   - Le point K milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :
     $$K\Big(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\Big)=\Big(\frac{-1+0}{2}\,;\frac{2+(-5)}{2}\Big)$$
     $$=\Big(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{2}\Big)$$
   - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
     $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(0-(-1)\,;-5-2)$
     $=(1\,;-7)$
   - La médiatrice (d) du segment $[AB]$ admet le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal. Son équation cartésienne est de la forme :
     $x-7{\cdot}y+c=0 \quad c\in\mathbb{R}$
     Le point K appartenant à la droite (d), ses coordonnées vérifient son équation cartésienne :

$$x_K - 7{\cdot}y_K + c = 0$$
$$\Big(-\frac{1}{2}\Big) - 7{\cdot}\Big(-\frac{3}{2}\Big) + c = 0$$
$$-\frac{1}{2} + \frac{21}{2} + c = 0$$
$$\frac{20}{2} + c = 0$$
$$10 + c = 0$$
$$c = -10$$

La médiatrice (d) a pour équation cartésienne :

$x - 7{\cdot}y - 10 = 0$

b. • Le point L milieu du segment $[AC]$ a pour coordonnées :

$$L\Big(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\Big) = \Big(\frac{-1+3}{2}\,;\frac{2+4}{2}\Big)$$
$$= \Big(\frac{2}{2}\,;\frac{6}{2}\Big) = (1\,;3)$$

• Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées :

$\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,; y_C - y_A) = (3-(-1)\,; 4-2)$

$= (4\,;2)$

• La médiatrice (d') du segment $[AC]$ admet le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour vecteur normal. La droite (d') admet pour équation cartésienne :

$4{\cdot}x + 2{\cdot}y + c = 0 \quad c\in\mathbb{R}$

Le point L appartenant à cette droite, ses coordonnées vérifient son équation cartésienne :

$$4{\cdot}x_L + 2{\cdot}y_L + c = 0$$
$$4\times1 + 2\times3 + c = 0$$
$$4 + 6 + c = 0$$
$$10 + c = 0$$
$$c = -10$$

La droite (d') a pour équation cartésienne :

$4{\cdot}x + 2{\cdot}y - 10 = 0$

2. a. Le centre du cercle circonscrit est sur le point de concourance de la médiatrice. Les coordonnées de centre sont solutions du système :

$$\begin{cases} x - 7{\cdot}y - 10 = 0 \\ 4{\cdot}x + 2{\cdot}y - 10 = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 4{\cdot}x - 28{\cdot}y - 40 = 0 \\ 4{\cdot}x + 2{\cdot}y - 10 = 0 \end{cases}$$

Par différence de ces deux équations, on a :

$$-28{\cdot}y - 2{\cdot}y - 40 - (-10) = 0$$
$$-30{\cdot}y - 40 + 10 = 0$$
$$-30{\cdot}y - 30 = 0$$
$$-30{\cdot}y = 30$$
$$y = \frac{30}{-30}$$
$$y = -1$$

En utilisant la première équation :

$$x - 7{\cdot}y - 10 = 0$$
$$x - 7\times(-1) - 10 = 0$$
$$x + 7 - 10 = 0$$
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

Le centre du cercle circonscrit du triangle ABC a pour coordonnées $L(3\,;-1)$.

b. Déterminons la distance LA :

$$LA = \sqrt{\big(x_A - x_L\big)^2 + \big(y_A - y_L\big)^2} = \sqrt{\big(-1-3\big)^2 + \big[2-(-1)\big]^2}$$
$$= \sqrt{\big(-4\big)^2 + \big(2+1\big)^2} = \sqrt{16+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Le cercle circonsrit au triangle ABC a pour centre $L(3\,;-1)$ et pour rayon 5. On en déduit l'équation cartésienne vérifiée par les coordonnées de tous les points $M(x\,;y)$:

$$LM^2 = 5^2$$
$$\big(x-3\big)^2 + \big[y-(-1)\big]^2 = 25$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

