Primitives et Equations différentielles

Exercice 1*

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = -3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - 1$ b. $g(x) = 3{\cdot}x^5 + 1$

c. $h(x) = (3+x)^2$ d. $j(x) = (2-x)^3$

e. $k(x) = (5x+1)^4$ f. $\ell(x) = x^3{\cdot}\left(x^4+1\right)^4$

Exercice 2*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2{\cdot}(x^3-5)^5$ b. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c. $h(x) = \dfrac{6x+2}{(3x^2+2x-5)^2}$ d. $j(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x-5}$

Exercice 3

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:
$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

2. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $\left]1\,;+\infty\right[$.

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a. $y' = -3y$ b. $y' - y = 0$

c. $5y' - 2y = 0$ d. $y = -3y'$

Exercice 5

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

a. $y' - 3y = 0 \quad ; \quad f(0) = 2$

b. $2y' + 3y = 0 \quad ; \quad f(0) = -1$

c. $3y' - 2y = 0 \quad ; \quad f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2$

d. $y - 3y' = 0 \quad ; \quad f(6) = \mathrm{e}^3$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $4{\cdot}y' - y = 4 \quad ; \quad y(1) = e$

b. $15{\cdot}y' + 24{\cdot}y = 12 \quad ; \quad y\left(\dfrac{5}{4}\right) = 2$

c. $-\dfrac{3}{2}{\cdot}y' + \dfrac{1}{4}{\cdot}y = -1 \quad ; \quad y(3) = 6 + 2{\cdot}e$

Exercice 7

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle : $y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}, \quad (E)$

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :
$u(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{2x}$
est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle :
$y' - 2{\cdot}y = 0 \quad (E_0)$

3. Démontrer qu'une fonction v définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $v-u$ est solution de (E_0).

4. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

5. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Partie B - Etude d'une fonction

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1){\cdot}\mathrm{e}^{2x}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1. Etudier la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

2. Soit x un nombre réel. Calculer $f'(x)$.
Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
Préciser le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

Partie C - Résolution d'une équation

1. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0{,}2\,;0{,}3]$.

2. Recopier, puis compléter le tableau suivant :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$						

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec une précision de 10^{-2} près par défaut.

3. Sur le papier millimétré ci-dessous, où les unités sont de 10 *cm* en abscisses et 5 *cm* en ordonnées, tracer l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à $[0\,;0{,}3]$.
Faire apparaître x_0 sur le graphique.

Exercice 8

On considère l'équation différentielle : $(E) :\ y' = 2{\cdot}y + \cos x$

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a{\cdot}\cos x + b{\cdot}\sin x$ soit une solution f_0 de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle : $(E_0) :\ y' = 2{\cdot}y$.

3. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - f_0$ est solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de (E).

5. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

