Correction 1

a. La fonction f a pour primitive la fonction F dont l'expression est donnée par :
$F(x) = -x^3 + x^2 - x$

Car la fonction F admet pour dérivée :
$F'(x) = -3{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2 - 1 = f(x)$

b. Considérons la fonction G définie par :
$G(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x^6 + x - 2$
Cette fonction admet pour dérivée une fonction dont l'expression est :
$G'(x) = \frac{1}{2}\times 6{\cdot}x^5 + 1 - 0 = 3{\cdot}x^5 + 1 = g(x)$

c. La fonction h admet pour primitive la fonction H dont l'expression est :
$H(x) = \frac{1}{3}{\cdot}(3+x)^3$
Car la fonction H admet pour dérivée la fonction dont l'expression est :
$H'(x) = \frac{1}{3}\times 3{\cdot}(3+x)^2 = (3+x)^2 = h(x)$

d. Considérons la fonction J définie par :
$J(x) = -\frac{1}{4}{\cdot}(2-x)^4$
qui admet pour dérivée la fonction dont l'expression est :
$J'(x) = -\frac{1}{4}\times 4{\cdot}(-1){\cdot}(2-x)^3 = (2-x)^3 = j(x)$
On en déduit que la fonction J est une primitive de la fonction j.

e. La fonction k admet pour primitive la fonction K définie par :
$K(x) = \frac{1}{20}(5x+4)^4$
Car la fonction K admet une dérivée dont l'expression est :
$K'(x) = \frac{1}{20}\times 4\times 5{\cdot}(5x+4)^3 = (5x+4)^3 = k(x)$

f. Considérons la fonction L définie par :
$L(x) = \frac{1}{20}{\cdot}(x^4+1)^5$
dont la dérivée a pour expression :
$L'(x) = \frac{1}{20}{\cdot}5{\cdot}(4{\cdot}x^3){\cdot}(x^4+1)^4 = x^3{\cdot}(x^4+1)^4 = \ell(x)$
Ainsi, la fonction L est une primitive de la fonction ℓ.

Correction 2

a. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = x^3 - 5 \quad ; \quad u'(x) = 3{\cdot}x^2$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction f admet pour expression :
$$f(x) = x^2{\cdot}(x^3-5)^5 = \frac{1}{3}{\cdot}u'(x){\cdot}\big[u(x)\big]^5$$
$$= \frac{1}{18}\times 6{\cdot}u'(x){\cdot}\big[u(x)\big]^5$$
Ainsi, la primitive F de la fonction f admet pour expression :
$F(x) = \frac{1}{18}\times\big[u(x)\big]^6 = \frac{1}{18}\times(x^3-5)^6$

b. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 2x$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction g admet pour expression :
$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x^2+1}} = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$
Ainsi, la primitive G de la fonction g admet pour expression :
$G(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2+1}$

c. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = 3x^2 + 2x - 5 \quad ; \quad u'(x) = 6x + 2$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction h admet pour expression :
$$h(x) = \frac{6x+2}{(3x^2+2x-5)^2} = (-1)\times\Big[-\frac{6x+2}{(3x^2+2x-5)^2}\Big]$$
$$= (-1)\times\left[-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\right]$$
Ainsi, la primitive H de la fonction h admet pour expression :
$H(x) = (-1)\times\frac{1}{u(x)} = -\frac{1}{3x^2+2x-5}$

d. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = 3x^2 + 2x - 5 \quad ; \quad u'(x) = 6x + 2$

A l'aide de manipulation algébrique, la fonction j admet pour expression :
$$j(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x-5} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
Ainsi, la primitive J de la fonction j admet pour expression :
$J(x) = \ln\big[u(x)\big] = \ln\big(3x^2+2x-5\big)$

Correction 3

1. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$
$$= \frac{a(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{b\times x{\cdot}(x-1)}{(x+1){\cdot}x{\cdot}(x-1)} + \frac{c\times x{\cdot}(x+1)}{(x-1){\cdot}x{\cdot}(x+1)}$$
$$= \frac{a(x^2-1)}{x(x^2-1)} + \frac{b{\cdot}(x^2-x)}{x(x^2-1)} + \frac{c{\cdot}(x^2+x)}{x(x^2-1)}$$
$$= \frac{a{\cdot}x^2 - a + b{\cdot}x^2 - b{\cdot}x + c{\cdot}x^2 + c{\cdot}x}{x(x^2-1)}$$
$$= \frac{(a+b+c){\cdot}x^2 + (c-b){\cdot}x - a}{x(x^2-1)}$$
Par identification, avec l'expression de la fonction g, on obtient le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ c-b = 0 \\ -a = 1 \end{cases}$$
On en déduit les valeurs suivantes :
$a = -1 \quad ; \quad b = \frac{1}{2} \quad ; \quad c = \frac{1}{2}$

Ainsi, la fonction f admet pour expression :
$$g(x) = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$
$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{2{\cdot}(x+1)} + \frac{1}{2{\cdot}(x-1)}$$

2. La fonction g admet aussi l'expression suivante :

$$g(x) = -1\times\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{x-1}$$

Ainsi, la fonction g admet pour primitive la fonction G définie par :

$$G(x) = -\ln\big(x\big) + \frac{1}{2}\cdot\ln\big(x{+}1\big) + \frac{1}{2}\cdot\ln\big(x{-}1\big)$$

Correction 4

a. Les fonctions solutions de léquation différentielles :

$$y' = -3y$$

sont de la forme :

$$f(x) = C\cdot e^{-3x} \quad \text{où } C\in\mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

b. L'équation différentielle proposée s'écrit :

$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ y' &= y \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de cette équation différentielle ont pour expression :

$$f(x) = C\cdot e^{x} \quad \text{où } C\in\mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

c. On a :

$$\begin{aligned} 5y' - 2y &= 0 \\ 5y' &= 2y \\ y' &= \frac{2}{5}\cdot y \end{aligned}$$

Cette équation a pour solution l'ensemble des fonctions qui s'écrivent sous la forme :

$$f(x) = C\cdot e^{\frac{2}{5}\cdot x} \quad \text{où } C\in\mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

d. Pour pouvoir utiliser le cours, il faut transformer l'écriture de cette équation différentielle :

$$\begin{aligned} y &= -3y' \\ -\frac{1}{3}\cdot y &= y' \\ y' &= -\frac{1}{3}\cdot y \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de cette équation admettent tous pour écriture :

$$f(x) = C\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x} \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

Correction 5

a. La relation différentielle proposée s'écrit également :

$$y' = 3\cdot y$$

L'ensemble des solutions ont pour écriture :

$$f(x) = C\cdot e^{3x} \quad \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

La condition initiale $f(0)=2$ va nous servir à déterminer la valeur de C :

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ C\cdot e^{3\cdot 0} &= 2 \\ C &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation différentielle $\begin{cases} y' - 3y = 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$ a pour solution :

$$f(x) = 2\cdot e^{3x}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} 2y' + 3y &= 0 \\ 2y' &= -3y \\ y' &= -\frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les solutions de cette équation admettent l'écriture :

$$f(x) = C\cdot e^{-\frac{3}{2}x}$$

Cherchons la valeur de C afin que la condition initiale soit vérifiée :

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ C\cdot e^{-\frac{3}{2}\cdot 0} &= -1 \\ C\cdot e^{0} &= -1 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f définie par $f(x)=-e^{-\frac{3}{2}\cdot x}$ est solution de léquation différentielle :

$$\begin{cases} 2y' + 3y = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

c. L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned} 3y' - 2y &= 0 \\ 3y' &= 2y \\ y' &= \frac{2}{3}y \end{aligned}$$

Ainsi, la solution de léquation différentielle :

$$\begin{cases} 3y' - 2y = 0 \\ f\Big(\frac{3}{2}\Big) = 2 \end{cases}$$

a pour expression : $f(x) = C\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x}$ où $C \in \mathbb{R}$

Pour vérifier la condition initiale, la fonction f doit vérifier :

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{3}{2}\Big) &= 2 \\ C\cdot e^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}} &= 2 \\ C\cdot e^{1} &= 2 \\ C &= 2\cdot e^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f a pour expression :

$$f(x) = 2\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x} = 2\cdot e^{\frac{2}{3}\cdot x-1}$$

d. La relation différentielle recherchée s'écrit également :

$$\begin{aligned} y - 3y' &= 0 \\ -3y' &= -y \\ y' &= \frac{1}{3}\cdot y \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de cette équation différentielle ont pour expression :

$$f(x) = C\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x} \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

Pour vérifier la condition initiale, la valeur de C doit vérifier :

$$\begin{aligned} f(6) &= e^{3} \\ C\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot 6} &= e^{3} \\ C\cdot e^{2} &= e^{3} \\ C &= e^{3}\cdot e^{-2} \\ C &= e^{3+(-2)} \\ C &= e^{1} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f admet pour écriture :

$$f(x) = e^{1}\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x} = \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x+1}$$

Correction 6

a. La fonction f recherchée doit vérifier l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} 4\cdot y' - y &= 4 \\ 4\cdot y' &= y + 4 \\ y' &= \frac{1}{4}\cdot y + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f admet pour expression :

$$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\cdot x}-\frac{1}{\frac{1}{4}}=C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\cdot x}-4 \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

La condition initiale va nous permettre de déterminer l'expression de la fonction f :

$$f(1)=e$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\cdot 1}-4=e$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}=e+4$$
$$C=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\cdot(e+4)$$

On obtient ainsi l'expression complète de la fonction f :

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\cdot(e+4)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\cdot x}-4=(e+4)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\cdot x-\frac{1}{4}}-4$$

b. L'équation différentielle recherchée est :

$$15y'+24y=12$$
$$15\cdot y'=-24\cdot y+12$$
$$y'=-\frac{24}{15}\cdot y+\frac{12}{15}$$
$$y'=-\frac{8}{5}\cdot y+\frac{4}{5}$$

Ainsi, la fonction f admet une expression de la forme :

$$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x}-\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{8}{5}}=C\cdot\mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x}+\frac{1}{2} \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

La condition initiale permet d'obtenir la valeur de C :

$$f\Big(\frac{5}{4}\Big)=2$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{-\frac{8}{5}\times\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}=2$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{-2}=2-\frac{1}{2}$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{-2}=\frac{3}{2}$$
$$C=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{e}^{2}$$

L'expression de la fonction f, solution de l'équation différentielle, est :

$$f(x)=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{e}^{2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{8}{5}x+2}+\frac{1}{2}$$

c. L'équation différentielle recherché peut également s'écrire :

$$-\frac{3}{2}\cdot y'+\frac{1}{4}\cdot y=-1$$
$$-\frac{3}{2}\cdot y'=-\frac{1}{4}\cdot y-1$$
$$y'=\Big(-\frac{2}{3}\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{4}y\Big)-\Big(-\frac{2}{3}\Big)\cdot 1$$
$$y'=\frac{1}{6}\cdot y+\frac{2}{3}$$

Ainsi, la fonction f solution de cette équation admet pour expression :

$$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{6}x}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}=C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{6}x}-4 \quad \text{où } C\in\mathbb{R}$$

Cherchons la valeur de C afin que la condition initiale soit vérifiée :

$$f(3)=6+2\cdot e$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{6}\cdot 3}-4=6+2\cdot e$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-4=6+2\cdot e$$
$$C\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=10+2\cdot e$$
$$C=(10+2e)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

L'expression de f est :

$$f(x)=(10+2e)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{6}x}-4=(10+2e)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}}-4$$

Correction 7

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

1. La fonction u est définie comme le produit des fonctions v et w définies par :

$v(x)=x \quad ; \quad w(x)=\mathrm{e}^{2x}$

qui admettent pour dérivée :

$v'(x)=1 \quad ; \quad w'(x)=2\cdot\mathrm{e}^{2x}$

Ainsi, la fonction u admet pour dérivée :

$$u'(x)=v'(x)\cdot w(x)+v(x)\cdot w'(x)$$
$$=1\cdot\mathrm{e}^{2x}+x\cdot\big(2\cdot\mathrm{e}^{2x}\big)=\mathrm{e}^{2x}+2x\cdot\mathrm{e}^{2x}$$

Montrons que la fonction u vérifie la relation (E) ; pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$u'(x)-2u(x)=\mathrm{e}^{2x}+2x\cdot\mathrm{e}^{2x}-2x\cdot\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}$

La fonction u vérifie l'équation (E)

2. L'équation différentielle (E_0) peut également s'écrire :

$$y'-2\cdot y=0$$
$$y'=2\cdot y$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$f(x)=C\cdot\mathrm{e}^{2x}$

3. Démontrons cette équivalence :

- $\Longrightarrow$ Supposons v est solution de (E) :

  Montrons que la fonction $(v-u)$ vérifie l'équation (E_0) :

  $(v-u)'(x)-2\cdot(v-u)(x)$

  $=v'(x)-u'(x)-2\cdot v(x)+2\cdot u(x)$

  $=\big[v'(x)-2\cdot v(x)\big]-\big[u'(x)-2\cdot u(x)\big]$

  u et v sont solutions de (E) :

  $=\mathrm{e}^{2\cdot x}-\mathrm{e}^{2\cdot x}=0$

  On vient de montrer que la fonction $(v-u)$ est solution de (E_0).

- $\Longleftarrow$ Supposons que $(v-u)$ est solution de (E_0) :

  Puisque $(v-u)$ est solution de (E_0), on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

  $$(v-u)'(x)-2\cdot(v-u)(x)=0$$
  $$v'(x)-u'(x)-2\cdot v(x)-2\cdot u(x)=0$$
  $$v'(x)-2\cdot v(x)=u'(x)-2\cdot u(x)$$

  u est solution de l'équation différentielle (E)

  $$v'(x)-2\cdot v(x)=\mathrm{e}^{2\cdot x}$$

  La fonction v est solution de l'équation (E).

4. Soit v une solution de l'équation (E) ; d'après la question précédente, on a $(v-u)$ qui est solution de (E_0). Ainsi, il existe un unique $C\in\mathbb{R}$ tel que :

$$(v-u)(x) = C{\cdot}\mathrm{e}^{2x}$$

On en déduit :

$$v(x)-u(x) = C{\cdot}\mathrm{e}^{2x}$$
$$v(x) = C{\cdot}\mathrm{e}^{2x}+u(x)$$
$$v(x) = C{\cdot}\mathrm{e}^{2x}+x{\cdot}\mathrm{e}^{2x}$$
$$v(x) = \big(x+C\big){\cdot}\mathrm{e}^{2x}$$

5. La fonction recherchée vérifie la condition initiale suivante :

$$f(0) = 1$$

Déterminons la valeur de C :

$$\big(0+C\big){\cdot}\mathrm{e}^{0} = 1$$
$$C = 1$$

Ainsi, la fonction recherchée admet pour expression :

$$f(x) = (x+1){\cdot}\mathrm{e}^{2x}$$

Partie B - Etude d'une fonction

1. - On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x+1 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$$

Par produit des limites, on obtient :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$$

- On a la transformation suivante :

$$f(x) = \big(x+1\big){\cdot}\mathrm{e}^{2x} = x{\cdot}\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2x}$$
$$= \frac{1}{2}{\cdot}\big(2x{\cdot}\mathrm{e}^{2x}\big)+\mathrm{e}^{2x}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} 2x{\cdot}\mathrm{e}^{2x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$$

Ainsi, on obtient la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = 0$

2. La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}\mathrm{e}^{2x}$$

Par dérivée d'un produit, on obtient l'expression de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)$$
$$= 1{\cdot}\mathrm{e}^{2x}+(x+1){\cdot}2{\cdot}\mathrm{e}^{2x} = (2x+3)\mathrm{e}^{2x}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que le signe de f' ne dépend que du facteur $(2x+3)$; ainsi, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

L'image de $-\dfrac{3}{2}$ par la fonction f a pour valeur :

$$f\Big(-\frac{3}{2}\Big) = \Big(-\frac{3}{2}+1\Big){\cdot}\mathrm{e}^{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{2}{\cdot}\mathrm{e}^{-3}$$

Ainsi la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
Variation de f	0 ↘	$-\frac{1}{2}{\cdot}\mathrm{e}^{2x}$	↗ $+\infty$

L'expression de la fonction f est donnée par le produit :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive, elle admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Partie C - Résolution d'une équation

1. On a les deux valeurs approchées suivantes :

$$f(0{,}2) \approx 1{,}79 \quad ; \quad f(0{,}3) \approx 2{,}37$$

De plus :

- La fonction f est continue sur $\big[0{,}2\,;0{,}3\big]$
- La fonction f est strictement croissante sur $\big[0{,}2\,;0{,}3\big]$
- le nombre 2 est compris entre les images aux bornes de l'intervalle $\big[0{,}2\,;0{,}3\big]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit qu'il existe une unique valeur $x_0\in\big[0{,}2\,;0{,}3\big]$ tel que :

$$f(x_0) = 2$$

2. Voici le tableau complété :

x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
$f(x)$	1,16	1,34	1,55	1,79	2,06	2,37

Correction 8

1. La dérivée de la fonction f_0 admet pour expression :

$$f_0'(x) = a{\cdot}\big(-\sin x\big)+b{\cdot}\cos x$$
$$= b{\cdot}\cos x - a{\cdot}\sin x$$

Ainsi, pour que f_0 soit solution de l'équation (E), on doit avoir l'égalité suivante :

$$f_0'(x) = 2{\cdot}f_0(x)+\cos x$$
$$f_0'(x)-2{\cdot}f_0(x)-\cos x = 0$$
$$b{\cdot}\cos x - a{\cdot}\sin x - 2{\cdot}\big(a{\cdot}\cos x+b{\cdot}\sin x\big)-\cos x = 0$$
$$b{\cdot}\cos x - a{\cdot}\sin x - 2{\cdot}a{\cdot}\cos x - 2{\cdot}b{\cdot}\sin x - \cos x = 0$$
$$\big[b-2{\cdot}a-1\big]\cos x+\big[a+2{\cdot}b\big]{\cdot}\sin x = 0$$

Cette égalité doit être vraie pour tout nombre réel x :

- Pour $x=0$, cette égalité de vient :

$$\big[b-2{\cdot}a-1\big]{\cdot}\cos 0+\big[a+2{\cdot}b\big]{\cdot}\sin 0 = 0$$
$$\big[b-2{\cdot}a-1\big]{\cdot}1+\big[a+2{\cdot}b\big]{\cdot}0 = 0$$
$$b-2{\cdot}a-1 = 0$$

- Pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, on a :

$$\big[b-2{\cdot}a-1\big]\cos\frac{\pi}{2}+\big[a+2{\cdot}b\big]{\cdot}\sin\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\big[b-2{\cdot}a-1\big]{\cdot}0+\big[a+2{\cdot}b\big]{\cdot}1 = 0$$
$$a+2{\cdot}b = 0$$

Ainsi, les réels a et b doivent vérifier le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} -2{\cdot}a+b-1 = 0 \\ a+2{\cdot}b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2{\cdot}a+b-1 = 0 \\ 2{\cdot}a+4{\cdot}b = 0 \end{array}\right.$$

Par addition des deux lignes du dernier système d'équations, on obtient :

$$\big(-2{\cdot}a+b-1\big)+\big(2{\cdot}a+4{\cdot}b\big) = 0$$
$$5{\cdot}b-1 = 0$$
$$5{\cdot}b = 1$$
$$b = \frac{1}{5}$$

De la seconde ligne, on obtient la valeur de a :

$$a+2\cdot b=0$$
$$a+2\cdot\frac{1}{5}=0$$
$$a+\frac{2}{5}=0$$
$$a=-\frac{2}{5}$$

Ainsi, la fonction f_0 recherchée a pour écriture :

$f_0(x)=-\frac{2}{5}\cdot\cos x+\frac{1}{5}\cdot\sin x$

2. L'équation $y'=2\cdot y$ admet pour solution toutes les fonctions dont l'expression est :
$g(x)=C\cdot e^{2\cdot x}$ où $C\in\mathbb{R}$.

3. Montrons les deux implications demandées :
   - $\Longrightarrow$: supposons que f une solution de (E) :
     f_0 est également solution de l'équation (E), on a les égalités :
     - $$f'(x)=2\cdot f(x)+\cos x$$ $$f'(x)-2\cdot f(x)=\cos x$$
     - $$f_0'(x)=2\cdot f_0(x)+\cos x$$ $$f_0'(x)-2\cdot f_0(x)=\cos x$$

     Etudions l'expression suivante :
     $$\big(f-f_0\big)'(x)-2\cdot\big(f-f_0\big)$$
     $$=f'(x)-f_0'(x)-2\cdot f(x)+2\cdot f_0(x)$$
     $$=\big[f'(x)-2\cdot f(x)\big]-\big[f_0'(x)-2\cdot f_0(x)\big]$$
     $$=\cos x-\cos x=0$$
     On en déduit que la différence $f-f_0$ de fonctions vérifie l'égalité :
     $$\big(f-f_0\big)'=2\cdot\big(f-f_0\big)$$
     Ainsi, $f-f_0$ est solution de (E).
   - $\Leftarrow$: supposons que $f-f_0$ est solution de (E_0) :
     Ce qui signifie qu'on a légalité :
     $$\big(f-f_0\big)'=2\cdot\big(f-f_0\big)$$
     $$f'(x)-f_0'(x)=2\cdot f(x)-2\cdot f_0(x)$$
     $$f'(x)-2\cdot f_0(x)-\cos x=2\cdot f(x)-2\cdot f_0(x)$$
     $$f'(x)-\cos x=2\cdot f(x)$$
     $$f'(x)=2\cdot f(x)+\cos x$$
     Ainsi, la fonction f est une solution de (E).

4. Soit f une solution de l'équation (E), on a vu précédemment que $f-f_0$ est solution de (E_0), ce qui entraîne l'existence d'un réel C vérifiant :
$$\big(f-f_0\big)(x)=C\cdot e^{2\cdot x}$$
$$f(x)-f_0(x)=C\cdot e^{2\cdot x}$$
$$f(x)=C\cdot e^{2\cdot x}+f_0(x)$$
$$f(x)=C\cdot e^{2\cdot x}-\frac{1}{2}\cdot\cos x+\frac{1}{4}\cdot\sin x$$

5. Ainsi, la solution k recherchée doit vérifier l'égalité :
$$k\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=0$$
$$C\cdot e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=0$$
$$C\cdot e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}-\frac{2}{5}\times 0+\frac{1}{5}\times 1=0$$
$$C\cdot e^{\pi}=-\frac{1}{5}$$
$$C=-\frac{1}{5}\cdot e^{-\pi}$$

La fonction k recherchée est :
$$k(x)=-\frac{1}{5}\cdot e^{-\pi}\cdot e^{2\cdot x}-\frac{2}{5}\cdot\cos x+\frac{1}{5}\cdot\sin x$$
$$=-\frac{1}{5}\cdot e^{2\cdot x-\pi}-\frac{2}{5}\cdot\cos x+\frac{1}{5}\cdot\sin x$$

