Préparation DS - Tale Spé maths

Correction 1

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel non-nul n par la relation :

   $\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant \sqrt{2}$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul.

   - **Initialisation :**

     On a :

     $$u_1 = \frac{1}{2}\cdot\Big(u_0 + \frac{2}{u_0}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2} + \frac{2}{\frac{1}{2}}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2} + \times\frac{2}{1}\Big)$$

     $$= \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{1}{2} + 4\Big) = \frac{1}{2}\times\frac{9}{2} = \frac{9}{4} \geqslant \sqrt{2}$$

     La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   - **Hérédité :**

     Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour un entier naturel non-nul n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse par récurrence :

     $u_n \geqslant \sqrt{2}$

     De la comparaison :

     $u_n \geqslant \sqrt{2}$

     La fonction f est croissante sur $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$

     $f(u_n) \geqslant f\big(\sqrt{2}\big)$

     $u_{n+1} \geqslant f\big(\sqrt{2}\big)$

     $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$

     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   - **Conclusion :**

     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 1 et elle vérifie la relation d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

2. On a les transformations algébriques :

   $$f(x) - x = \frac{1}{2}\cdot\Big(x + \frac{2}{x}\Big) - x = \frac{1}{2}\cdot\Big(x + \frac{2}{x} - 2x\Big)$$

   $$= \frac{1}{2}\cdot\Big(\frac{2}{x} - x\Big) = \frac{2 - x^2}{2x} = \frac{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)}{2x}$$

   On obtient le tableau de signes de cette différence sur $\big]0\,;+\infty\big[$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$2-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-x$					$\Vert$	$+$	0	$-$	

   Ainsi, on vient d'établir que sur l'intervalle $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$:

   $f(x) - x \leqslant 0$

   $f(x) \leqslant x$

3. La question 1. a permis montrer que tout entier naturel n non-nul, le terme u_n appartiennent à l'intervalle $\big[\sqrt{2}\,;+\infty\big[$.

   Ainsi, d'après la question 2., pour tout entier naturel n non nul, on a la comparaison :

   $f(u_n) \leqslant u_n$

   Par définition de la suite (u_n), on a :

   $u_{n+1} \leqslant u_n$

   On vient d'établir que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

4. D'après la question 1., la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

   D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissant à partir du rang 1.

   D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 2

1. Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\alpha]$. On a l'encadrement :

   $0 \leqslant \quad x \quad \leqslant \alpha$

   La fonction f est strictement croissante :

   $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$

   $1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$

   $0 \leqslant 1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$

   $0 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$

   On vient de montrer : $x \in [0\,;\alpha] \implies f(x) \in [0\,;\alpha]$.

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

   $\mathcal{P}_n$: "$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :**

     On a : $u_1 = 6 - \dfrac{5}{u_0+1} = 6 - \dfrac{5}{0+1} = 6 - 5 = 1$

     On a la comparaison suivante :

     $0 \leqslant \ 0 \ \leqslant \ 1 \ \leqslant \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$

     $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$

     La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   - **Hérédité :**

     Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

     $0 \leqslant \quad u_n \quad \leqslant \quad u_{n+1} \quad \leqslant \alpha$

     Par croissance de la fonction f :

     $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$

     $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \quad u_{n+2} \quad \leqslant \alpha$

     $0 \leqslant 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \quad u_{n+2} \quad \leqslant \alpha$

     $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \quad u_{n+2} \quad \leqslant \alpha$

     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   - **Conclusion :**

     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. De la comparaison obtenue à la question 2. pour tout entier naturel n, on en déduit que la suite (u_n) est crois-

BY-NC

sante sur $\mathbb{N}$.
De plus, elle est majorée par α.

D'après les théorèmes de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 3

1. (a.) Résolvons l'équation :
$$-3-\ln x+2\cdot\big(\ln x\big)^2=0$$
Effectuons le changement de variable $X=\ln x$
$$-3-X+2\cdot X^2=0$$
$$2\cdot X^2-X-3=0$$
Le polynôme du membre de gauche admet pour discriminant :
$$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times 2\times(3)=1+24=25$$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{25}=5$
Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-5}{2\times 2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+5}{2\times 2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Ainsi, les valeurs de x solutions de l'équation $f(x)=0$ doivent vérifier :

$$\ln x_1=X_1 \quad ; \quad \ln x_1=-1 \quad ; \quad e^{\ln x_1}=e^{-1} \quad ; \quad x_1=e^{-1}$$

$$\ln x_2=X_2 \quad ; \quad \ln x_2=\frac{3}{2} \quad ; \quad e^{\ln x_2}=e^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad x_2=e^{\frac{3}{2}}$$

Cette équation admet pour ensemble de solution :
$$\mathcal{S}=\Big\{e^{-1}\,;\,e^{\frac{3}{2}}\Big\}$$

(b.) Pour étudier le signe de $f(x)$, on utilise encore le changement de variable $X=\ln x$; de plus, le coefficient du second degré de ce polynôme est strictement positif et l'étude faite à la question (a.) permet d'obtenir le tableau de signes suivant :

X	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2\cdot X^2-X-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce polynôme est strictement positif pour les valeurs de X appartenant à l'ensemble :
$$\big]-\infty\,;-1\big[\;\cup\;\Big]\frac{3}{2}\,;+\infty\Big[$$
Par le changement de variable posé, on en déduit que la fonction f est strictement positif sur l'ensemble :
$$\big]0\,;e^{-1}\big[\;\cup\;\big]e^{\frac{3}{2}}\,;+\infty\big[$$

2. (a.)
- On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto 0^+}-\ln x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+}2\cdot\big(\ln x\big)^2=+\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^+}f(x)=+\infty$$
- On a la transformation algébrique suivante :
$$f(x)=-3-\ln x+2\cdot\big(\ln x\big)^2=-3+\ln x\cdot\big(2\cdot\ln x-1\big)$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln x=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty}2\cdot\ln x-1=+\infty$$
On en déduit la limite du produit :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln x\cdot\big(2\cdot\ln x-1\big)=+\infty$$
La fonction f admet la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$

(b.) Notons u la fonction définie par :
$$u(x)=\ln x \quad ; \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$
La fonction f admet pour expression :
$$f(x)=-3-u(x)+2\cdot\big[u(x)\big]^2$$
La dérivée f' admet pour expression :
$$f'(x)=0-u'(x)+2\cdot\big[2\cdot u'(x)\cdot u(x)\big]$$
$$=0-\frac{1}{x}+2\times 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x=-\frac{1}{x}+\frac{4\cdot\ln x}{x}=\frac{4\cdot\ln x-1}{x}$$

(c.) Sur $\big]0\,;+\infty\big[$, le dénominateur de la fonction f' est strictement positif ; ainsi, le signe de f' ne dépend que de son numérateur. Résolvons l'équation suivante :
$$4\cdot\ln x-1>0$$
$$\ln x>\frac{1}{4}$$
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$$e^{\ln x}>e^{\frac{1}{4}}$$
$$x>e^{\frac{1}{4}}$$
On en déduit que :
- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\big[e^{\frac{1}{4}}\,;+\infty\big[$;
- la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\big]0\,;e^{\frac{1}{4}}\big]$.

L'image de $e^{\frac{1}{4}}$ par la fonction f a pour valeur :
$$f\big(e^{\frac{1}{4}}\big)=-3-\ln\big(e^{\frac{1}{4}}\big)+2\cdot\big(\ln e^{\frac{1}{4}}\big)^2$$
$$=-3-\frac{1}{4}+2\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^2=-3-\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{16}$$
$$=-3-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{-24-2+1}{8}=-\frac{25}{8}$$
On a le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$-\frac{25}{8}$	↗ $+\infty$

3. Pour déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$, déterminons les deux valeurs suivantes :
- L'image de $e^{\frac{5}{4}}$ par la fonction f a pour valeur :
$$f\big(e^{\frac{5}{4}}\big)=-3-\ln\big(e^{\frac{5}{4}}\big)+2\cdot\Big[\ln\big(e^{\frac{5}{4}}\big)\Big]^2$$
$$=-3-\frac{5}{4}+2\cdot\Big(\frac{5}{4}\Big)^2=-3-\frac{5}{4}+2\times\frac{25}{16}$$
$$=-3-\frac{5}{4}+\frac{25}{8}=\frac{-24-10+25}{8}=-\frac{9}{8}$$
- La fonction f admet pour nombre dérivée en $e^{\frac{5}{4}}$:
$$f'\big(e^{\frac{5}{4}}\big)=\frac{4\cdot\ln\big(e^{\frac{5}{4}}\big)-1}{e^{\frac{5}{4}}}=\Big(4\times\frac{5}{4}-1\Big)\cdot e^{-\frac{5}{4}}=4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$$

Ainsi, la tangente $(\mathscr{T})$ admet équation :

 CC BY-NC

$$y = f'\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\right)\cdot\left(x - \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) + f\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right)$$

$$y = 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\cdot\left(x - \mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\cdot x - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{5}{4}} - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\cdot x - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}} - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\cdot x - 4 - \frac{9}{8}$$

$$y = 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\cdot x - \frac{41}{8}$$

4. (a.) La dérivée de la fonction φ a pour expression :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} = \frac{4\cdot\ln x - 1}{x} - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$$

Ainsi, la fonction φ' admet pour expression :

$$\varphi'(x) = \frac{u(x)}{v(x)} - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x) = 4\cdot\ln x - 1 \quad ; \quad v(x) = x$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 4\times\frac{1}{x} - 0 = \frac{4}{x} \quad ; \quad v'(x) = 1$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction φ'' :

$$\varphi''(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} - 0$$

$$= \frac{\frac{4}{x}\cdot x - \big(4\cdot\ln x - 1\big)\cdot 1}{x^2} = \frac{4 - 4\cdot\ln x + 1}{x^2} = \frac{5 - 4\cdot\ln x}{x^2}$$

(b.) Le quotient a un dénominateur strictement positif ; ainsi, le signe de $\varphi''(x)$ ne dépend que du signe du numérateur :

$$\begin{array}{r|r} 5 - 4\cdot\ln x > 0 & \ln x < \dfrac{5}{4} \\ -\,4\cdot\ln x > -5 & \mathrm{e}^{\ln x} < \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \\ \ln x < \dfrac{-5}{-4} & x < \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \end{array}$$

On en déduit que :

- φ' est strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{5}{4}\right[$;
- φ' est strictement décroissante sur $\left]\frac{5}{4}\,;+\infty\right[$.

Ainsi, la fonction φ' admet un maximum en $\frac{5}{4}$ et ce maximum a pour valeur :

$$\varphi'\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) = \frac{4\cdot\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) - 1}{\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}} - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} = \frac{4\times\frac{5}{4} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}} - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{4}{\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}} - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} = 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} - 4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} = 0$$

Le maximum de la fonction φ' étant nul, on en déduit que la fonction φ' est négarive sur $\big[0\,;+\infty\big[$:

$$\varphi'(x) \leqslant 0 \quad \text{pour tout } x \in \big[0\,;+\infty\big[$$

(c.) On a l'image suivante :

$$\varphi\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) = \left[-3 - \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right) + 2\cdot\left[\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right)\right]^2\right] - \left(4\cdot\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{5}{4}} - \frac{41}{8}\right)$$

$$= -3 - \frac{5}{4} + 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(4\cdot\mathrm{e}^0 - \frac{41}{8}\right) = -3 - \frac{5}{4} + \frac{25}{8} + \frac{9}{8}$$

$$= \frac{-24 - 10 + 25 + 9}{8} = 0$$

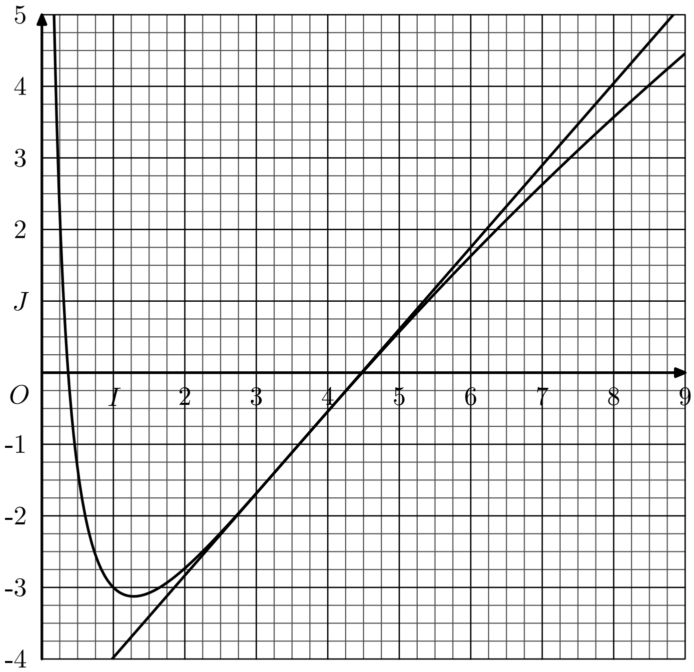
La question (b.) permet d'affirmer que la fonction φ est décroissante sur $\big]0\,;+\infty\big[$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}$		$+\infty$
$\varphi(x)$	‖	$+$	0	$-$	

On en déduit que :

- la courbe $\mathscr{C}$ se situe au dessus de la tangente $\mathscr{T}$ sur l'intervalle $\left]0\,;\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\right[$;
- la courbe $\mathscr{C}$ se situe en dessous de la tangente $\mathscr{T}$ sur l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}\,;+\infty\right[$.

5. Voici le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente $\mathscr{T}$:



Correction 4

Partie A :

1. (a.)

- La fonction f est définie par une expression de la forme :

$$f(x) = 1 + u(x)\cdot v(x)$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \ln\big(x+2\big)$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x+2}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = 0 + u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$= 1\cdot\ln\big(x+2\big) + x\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$= \ln\big(x+2\big) + \frac{x}{x+2}$$

- La fonction f' est donnée sous la forme :

$$f'(x) = \ln\big(x+2\big) + \frac{u(x)}{v(x)}$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x + 2$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 1$$

La formule de dérivation de la composée par la fonction logarithme et la formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f'' :

 (cc) BY-NC

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{1}{x+2} + \frac{1\cdot(x+2) - x\cdot 1}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{x+2+2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

b. Le quotient du dénominateur définissant f'' étant strictement positif sur l'intervalle $\big]-2\,;+\infty\big[$, le signe de f'' ne dépend que de son numérateur.
On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$	-4		-2	$+\infty$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$				‖	$+$

On en déduit que la fonction f'' est croissante sur $\big]-2\,;+\infty\big[$

c. Déterminons les deux limites demandées :

- On a la transformation algébrique :
$$f'(x) = \ln\big(x+2\big) + \frac{x}{x+2} = \frac{(x+2)\cdot\ln\big(x+2\big) + x}{x+2}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto -2^+} (x+2)\cdot\ln\big(x+2\big) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto -2^+} x = -2$$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto -2^+} f'(x) = \lim_{x\mapsto -2^+} \frac{(x+2)\cdot\ln\big(x+2\big) + x}{x+2} = -\infty$$
- Pour $x\neq 0$, on a la transformation algébrique :
$$f'(x) = \ln\big(x+2\big) + \frac{x}{x+2}$$
$$= \ln\big(x+2\big) + \frac{x}{x\cdot\Big(1+\dfrac{2}{x}\Big)} = \ln\big(x+2\big) + \frac{1}{1+\dfrac{2}{x}}$$
On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} \ln\big(x+2\big) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{1+\dfrac{2}{x}} = 1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} f'(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} \ln\big(x+2\big) + \frac{1}{1+\dfrac{2}{x}} = +\infty$$

2. a.
- Sur l'intervalle $\big]-2\,;+\infty\big[$:
On a les deux limites aux bornes de cet intervalle :
$$\lim_{x\mapsto -2^+} f'(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} f'(x) = +\infty$$
De plus :
  - ⇨ la fonction f' est continue sur $\big]-2\,;+\infty\big[$
  - ⇨ la fonction f' est strictement croissante sur $\big]-2\,;+\infty\big[$
  - ⇨ le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $\big]-2\,;+\infty\big[$.

  D'aprés le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\big]-2\,;+\infty\big[$.
- On a les valeurs approchées suivantes :
$$f'(-0{,}6) \approx -0{,}092 \quad ; \quad f'(-0{,}5) \approx 0{,}072$$
De plus :
  - ⇨ la fonction f est continue sur $\big]-0{,}6\,;-0{,}5\big[$
  - ⇨ la fonction f est strictement croissante sur $\big]-0{,}6\,;-0{,}5\big[$
  - ⇨ les images $f'(-0{,}6)$ et $f'(-0{,}5)$ sont de signes contraires

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que le nombre α appartient à l'intervalle $\big]-0{,}6\,;-0{,}5\big[$.

b. Ainsi, la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3. a. Du tableau de signes de la fonction f', on en déduit le tableau de variations de la fonction f :

- La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\big]-2\,;\alpha\big[$;
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\big]\alpha\,;+\infty\big[$.

b. Etudions les deux limites demandées :

- De la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto -2^+} \ln\big(x+2\big) = -\infty$
On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto -2^+} f(x) = \lim_{x\mapsto -2^+} 1 + x\cdot\ln\big(x+2\big) = +\infty$$
- On a les deux limites suivantes :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto +\infty} \ln\big(x+2\big) = +\infty$$
On en déduit la limite du produit :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} 1 + x\cdot\ln\big(x+2\big) = +\infty$$

c. La fonction f admet le tableau de variations suivant sur l'intervalle $\big]-2\,;+\infty\big[$

x	-2		α		$+\infty$
Variation de f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

L'usage de la calculatrice donne les deux valeurs approchées suivantes :
$$\alpha \approx 0{,}545 \quad ; \quad f(\alpha) \approx 0{,}7956$$

Partie B :

1. a. On a la transformation algébrique :
$$d(x) = f(x) - \big[f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)\big]$$
$$= f(x) - f'(x_0)\cdot x + \underbrace{f'(x_0)\cdot x_0 - f(x_0)}_{\in\mathbb{R}}$$
On en déduit l'expression de d' :
$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

b. Soit $x_0\in\big]-2\,;+\infty\big[$. Effectuons une disjonction de cas :

- Soit $x\in\big]-2\,;x_0\big[$. On a :
$$x < x_0$$
La fonction f' est croissante sur $\big]-2\,;+\infty\big[$:
$$f'(x) < f'(x_0)$$
$$f'(x) - f'(x_0) < 0$$
$$d'(x) < 0$$
On en déduit que la fonction d est décroissante sur $\big]-2\,;x_0\big[$.
- Soit $x\in\big]x_0\,;+\infty\big[$. On a :

 BY-NC

$$x > x_0$$

La fonction f' est croissante sur $]-2\,;+\infty[$:

$$f'(x) > f'(x_0)$$
$$f'(x) - f'(x_0) > 0$$
$$d'(x) > 0$$

On en déduit que la fonction d est croissante sur $]x_0\,;+\infty[$.

2. L'image de x_0 par la fonction d a pour valeur :
$d(x_0) = f(x_0) - \big[f'(x_0){\cdot}(x_0 - x_0) + f(x_0)\big]$
$= f(x_0) - \big[f'(x_0){\times}0 + f(x_0)\big] = f(x_0) - f(x_0) = 0$

Ainsi, la fonction d admet le tableau de variations suivant :

x	-2	x_0	$+\infty$
Variation de d	$\searrow$	0	$\nearrow$

La fonction d admettant un minimum valant 0, on en déduit que la fonction d est positive sur $]-2\,;+\infty[$:

$$d(x) \geqslant 0$$
$$f(x) - \big[f'(x_0){\cdot}(x - x_0) + f(x_0)\big] \geqslant 0$$
$$f(x) \geqslant f'(x_0){\cdot}(x - x_0) + f(x_0)$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe toujours au dessus de sa tangente T_{x_0} au point d'abscisse x_0.

Correction 5

Une video est accessible

1. L'expression de la fonction f est donée par :
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + 0{,}4$$
où les fonctions u et v s'expriment par :
$u(x) = 0{,}4 \quad ; \quad v(x) = 20{\cdot}\mathrm{e}^{-x} + 1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = -20{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{0{\cdot}\big(20{\cdot}\mathrm{e}^{-x} + 1\big) - 0{,}4{\cdot}\big(-20{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\big)}{\big(20{\cdot}\mathrm{e}^{-x} + 1\big)^2} = \frac{8{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}{\big(20{\cdot}\mathrm{e}^{-x} + 1\big)^2}$$

2. La fonction g est la dérivée seconde de la fonction f. A l'aide de la factorisation proposée, on a :
$$f''(x) = 8{\cdot}\mathrm{e}^{-x}{\cdot}\frac{20{\cdot}\mathrm{e}^{-x} - 1}{\big(10{\cdot}\mathrm{e}^{-x} + 1\big)^3}$$

La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit les facteurs $8{\cdot}\mathrm{e}^{-x}$ et $20{\cdot}\mathrm{e}^{-x}{+}1$ sont strictement positifs : le signe de la fonction f'' ne dépend que de l'expression $20{\cdot}\mathrm{e}^{-x}{-}1$.

Résolvons l'inéquation :
$$20{\cdot}\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$$
$$20{\cdot}\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1$$
$$\mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{20}$$
$$\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0{,}05$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\ln\big(\mathrm{e}^{-x}\big) \geqslant \ln\big(0{,}05\big)$$
$$-x \geqslant \ln\big(0{,}05\big)$$
$$x \leqslant -\ln\big(0{,}05\big)$$

De la valeur approchée $-\ln\big(0{,}05\big) \approx 2{,}996$, on a le tableau de signes :

x	0		$-\ln(0{,}05)$		8
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Pour une fonction dérivable deux fois, une fonction est convexe lorsque sa dérivée seconde est strictement positive. On en déduit que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\big[0\,;-\ln\big(0{,}05\big)\big]$.

Correction 6

1. La probabilité d'avoir un stylo présentant un défaut est de $0{,}1$. Ainsi, de choisir un stylo au hasard et de regarder s'il a un défaut ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre $0{,}1$.

Le fait de prélever 8 stylos successivement et avec remise, permet de modéliser cette expérience aléatoire par un schéma de Bernoulli de paramètre 8 et $0{,}1$.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de stylo présentant un défaut, elle suit une loi binomiale de paramètres 8 et $0{,}1$:
$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\big(8\,;0{,}1\big)$.

2. Voic le calcul des probabilités demandées :

a. $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}0\big) = \binom{8}{0}{\times}0{,}1^0{\times}0{,}9^8 = 0{,}9^8$
$\approx 0{,}43046 \approx 0{,}43$

b. Les évènements $\big\{\mathcal{X}{\geqslant}1\big\}$ et $\big\{\mathcal{X}{<}1\big\}$ sont deux évènements complémentaires :
$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X}{\geqslant}1\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}{<}1\big)$
$= 1 - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}0\big) \approx 0{,}57$

c. $\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}2\big) = \binom{8}{2}{\times}0{,}1^2{\times}0{,}9^6 = 15{\times}0{,}1^2{\times}0{,}9^6$
$\approx 0{,}1488 \approx 0{,}15$

Correction 7

1. a. $\binom{15}{3} = 455$ b. $\binom{24}{3} = 2024$

c. $\binom{54}{12} = 343\,006\,888\,770$ d. $\binom{51}{51} = 1$

2. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}5) \approx 0{,}21$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}8) \approx 0{,}03$

c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{=}12) \approx 0$

3. a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}{\leqslant}9) \approx 0{,}03$

 CC BY-NC

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 15) \approx 0{,}50$

c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 23) = 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}<23)$
$= 1 - \mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 22) \approx 1 - 0{,}98 = 0{,}02$

Correction 8

1. Le fait de tirer une boule noire dans ce jeu est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\dfrac{3}{8}$.
Les 10 parties étant indépendantes et donc assimilables à un tirage avec remise, nous pouvons modéliser cette répétition par un schéma de Bernoulli de paramètre 10 et $\dfrac{3}{8}$.
Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de boules noires tirées. La variable $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{3}{8}$:
$\mathcal{X} \sim \mathcal{B}\Big(10\,;\,\dfrac{3}{8}\Big)$.
La probabilité de gagner 3 parties sur les dix jouées est égale à :
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=3\big) = \dbinom{10}{3}\cdot\Big(\dfrac{3}{8}\Big)^3\cdot\Big(\dfrac{5}{8}\Big)^7 = 120\times\dfrac{3^3\times 5^7}{8^{10}} \approx 0{,}236$

2. On a la probabilité suivante :
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=0\big) \approx 0{,}009$
Ainsi, la probabilité demandée a pour valeur :
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 1\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}=0\big) \approx 1 - 0{,}009 = 0{,}991$

3. En utilisant le tableau, on a les probabilités suivantes :
- $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 6\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}<6\big) = 1 - 0{,}8725 = 0{,}1275$
- $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 7\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}<7\big) = 1 - 0{,}9616 = 0{,}0384$

Ainsi, c'est pour $N=7$ que la probabilité de l'évènement "*la personne gagne au moins N parties*" devient inférieure à $\dfrac{1}{10}$.

Correction 9

Une video est accessible

1. La probabilité de choisir un sac défectueux est de 0,03. Ainsi, le fait de tirer au hasard un sac et de regarder s'il est défectueux ou non est une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,03.

La production étant suffisamment grande pour supposer le prélèvement de 100 sacs à un tirage avec remise, on modélise ce prélèvement par un schéma de Bernoulli de paramètre 100 et 0,03.

La variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de sacs défectueux sur ce prélévement, elle suit une loi binomiale de paramètre 100 et 0,03.
$\mathcal{X}\sim\mathcal{B}\big(100\,;0{,}03\big)$

2. L'évenement "*au moins un sac est défectueux*" est caractérisée par des valeurs de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ supérieure ou égale à 1. Ainsi, la probabilité recherchée est $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 1\big)$.

Les deux évènements $\big\{\mathcal{X}<1\big\}$ et $\big\{\mathcal{X}\geqslant 1\big\}$ sont complémentaires. On en déduit :
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 1\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}<1\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\mathcal{X}=0\big)$
$= 1 - \dbinom{100}{0}\times 0{,}03^0\times 0{,}97^{100} = 1 - 0{,}97^{100}$
$\approx 0{,}95244 \approx 0{,}95$

Cela signifie que sur un lot de 100 sacs, il y a 95 % de chances d'avoir au moins un sac qui soit défectueux.

3. Les propriétés des variables aléatoires suivant une loi binomiale permettent d'obtenir directement l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:
$E(\mathcal{X}) = n\times p = 100\times 0{,}03 = 3$

Ainsi, par prélèvement de 100 sachets, en moyenne on trouvera 3 sachets défectueux.

 CC BY-NC