Exercice 1*

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

On admet que la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0=\frac{1}{2}\quad;\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :
$u_n\geqslant\sqrt{2}$

2. Montrer que pour tout $x\geqslant\sqrt{2}$: $f(x)\leqslant x$.

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

4. Prouver que la suite (u_n) converge.

Exercice 2*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=6-\frac{5}{x+1}$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. On note α l'unique nombre réel positif vérifiant :

$$f(\alpha)=\alpha\qquad\text{où}\quad\alpha=\frac{5+\sqrt{29}}{2}$$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=0\quad;\quad u_{n+1}=f(u_n)=6-\frac{5}{u_n+1}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$

3. Etablir que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=-3-\ln x+2\cdot(\ln x)^2$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1. a. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation : $f(x)=0$.
(On pourra poser : $\ln x=X$).
   b. Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'inéquation : $f(x)>0$.

2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Calculer $f'(x)$.
   c. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente $(\mathscr{T})$ à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. On se propose d'étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$. Pour cela, on considère la fonction φ, définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$\varphi(x)=f(x)-\left(4\cdot e^{-\frac{5}{4}}\cdot x-\frac{41}{8}\right)$$
   a. Montrer que : $\varphi'(x)=\dfrac{4\cdot\ln x-1}{x}-4\cdot e^{-\frac{5}{4}}$
puis calculer $\varphi''(x)$.
   b. Etudier le sens de variation de φ' sur $]0\,;+\infty[$.
En déduire que, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, on a : $\varphi'(x)\leqslant 0$.
   c. Calculer $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$. Pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, déterminer le signe de $\varphi(x)$.
En déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\mathscr{T})$.

5. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{T})$. *(unité graphique : 2 cm)*

Exercice 4*

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I=]-2\,;+\infty[$ par : $f(x)=1+x\cdot\ln(x+2)$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Partie A : étude de la fonction f

1. Etude des variations de la dérivée f'.
   a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   b. Etudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.

2. Etude du signe de $f'(x)$.
   a. Montrer que sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0{,}6\,;-0{,}5]$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Etude des variations de f
   a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$.
   b. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.
   c. Dresser le tableau de variations de f.

Partie B

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse x_0.
On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2\,;+\infty[$:

$$d(x)=f(x)-\left[f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right]$$

1. Etude des variations de d.

   a. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $\left]-2\,;+\infty\right[$:
   $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

   b. En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $\left]-2\,;+\infty\right[$.

2. Déterminer la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ et de T_{x_0}.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[0\,;8]$ par :
$f(x) = \dfrac{0{,}4}{20\cdot e^{-x}+1} + 0{,}4$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{8\cdot e^{-x}}{\left(20\cdot e^{-x}+1\right)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	`f'(x):=8*e^(-x)/(20*e^(-x)+1)^2` $f'(x) := \dfrac{8\cdot e^{-x}}{400\left(e^{-x}\right)^2 + 40\cdot e^{-x} + 1}$
2	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $g(x) := \dfrac{160\cdot\left(e^{-x}\right)^2 - 8\cdot e^{-x}}{8000\cdot\left(e^{-x}\right)^3 + 1200\cdot\left(e^{-x}\right)^2 + 60\cdot e^{-x} + 1}$
3	`Factoriser[g(x)]` $8\cdot e^{-x}\cdot\dfrac{20\cdot e^{-x} - 1}{\left(20\cdot e^{-x}+1\right)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Exercice 6*

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huits stylos prélevés.

1. On admet que $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité des évènements suivants :

   a. A : "*il n'y a aucun stylo avec un défaut*" ;

   b. B : "*il y a au moins un stylo avec un défaut*" ;

   c. C : "*il y a exactement deux stylos avec un défaut*".

Exercice 7

On répondra aux questions suivantes en utilisant la calculatrice :

1. Donner la valeur des coefficients binomiaux suivant :

   a. $\dbinom{15}{3}$ b. $\dbinom{24}{3}$ c. $\dbinom{54}{12}$ d. $\dbinom{51}{51}$

2. Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(15\,;0{,}3)$.
   Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=8)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=12)$

3. Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire telle que $\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(52\,;0{,}3)$.
   Donner les valeurs approchées au centième des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 15)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 23)$

Exercice 8

Dans un jeu, on convient qu'une partie est gagnée lorsque la boule obtenue est noire et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\dfrac{3}{8}$.
Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

1. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

2. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

3. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943

k	6	7	8	9	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}<k)$	0,8725	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999

   Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : "*la personne gagne au moins N parties*".

   A partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évèneemnt est-elle inférieure à $\dfrac{1}{10}$?

Exercice 9

Une usine produit des sacs. On suppose que la probabilité *(arrondie au centième)* qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement "*au moins un sac est défectueux*" ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

3. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

