Correction 1

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
On a les deux valeurs suivantes :
$u_0 = 13 \quad ; \quad 1 + \dfrac{12}{5^0} = 1 + \dfrac{12}{1} = 1 + 12 = 13$
On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$
La définition de la suite (u_n) permet d'obtenir l'expression du terme de rang $(n{+}1)$:
$$u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\cdot\Big(1 + \frac{12}{5^n}\Big) + \frac{4}{5}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{12}{5^n} + \frac{4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$
On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**
On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et qu'elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. On a l'encadrement $0 < \dfrac{1}{5} < 1$. On en déduit la limite :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} \Big(\frac{1}{5}\Big)^n = 0$$
On en déduit la limite :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} 1 + \frac{12}{5^n} = \lim_{n\mapsto+\infty} 1 + 12\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^n$$
$$= 1 + 12\times 0 = 1$$

Correction 2

1. Considérons pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n \leqslant 7$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
On a : $u_0 = 5 \leqslant 7$
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n \leqslant 7$
Partons de la comparaison suivante :
$$u_n \leqslant 7$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n \leqslant \frac{7}{3}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \leqslant \frac{7}{3} + 4$$
$$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3}$$
$$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3} \leqslant 7$$
$$u_{n+1} \leqslant 7$$
On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

2. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{Q}_n$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
Le terme de rang 1 a pour valeur :
$u_1 = \dfrac{1}{3}\times 5 + 4 = \dfrac{5}{3} + 4 = \dfrac{17}{3}$
On a la comparaison :
$$5 < \frac{17}{3}$$
$$u_0 < u_1$$
Ainsi, la propriété $\mathcal{Q}_0$ est vérifiée.

- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n \leqslant u_{n+1}$
Partons de la comparaison :
$$u_n < u_{n+1}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1} + 4$$
$$u_{n+1} < u_{n+2}$$
On vient détablir la propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$.

- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée. D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

Correction 3

1. Calculons $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}\cdot u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}\cdot u_n - 2$$
$$= \frac{1}{3}\cdot(u_n - 6) = \frac{1}{3}\cdot v_n$$

Le rapport entre deux termes consécutifs étant constant, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=5-6=-1$.

2. Une suite géométrique de premier terme -1 et de raison $\dfrac{1}{3}$ a son terme de rang n qui admet pour expression:

$$v_n=-1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3. On a:

$$v_n=u_n-6$$

D'après la question 2.

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^n=u_n-6$$
$$u_n=6-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4. On a l'encadrement: $0\leqslant\dfrac{1}{3}<1$

On en déduit la limite: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

On en déduit la valeur de la limite de la suite (u_n):

$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=6-0=6$$

Correction 4

a. On a les deux limites suivantes:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}n^3=+\infty\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}5^n=+\infty$$

On en déduit la limite suivante:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}n^3\times5^n=+\infty$$

b. On a les deux limites suivantes:

- $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}n=+\infty$
- Puisque $0\leqslant\dfrac{2}{7}<1$, on a: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$

On en déduit la limite suivante:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}n-\left(\frac{2}{7}\right)^n=+\infty$$

c. On a les deux limites suivantes:

- Puisque $0\leqslant\dfrac{1}{3}<1$, on a: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$
- Puisque $\dfrac{3}{2}>1$, on a: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$

On en déduit la limite suivante:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{3}{2}\right)^n=-\infty$$

d. On a la transformation algébrique suivante:

$$8^n-3^n=8^n\cdot\left(1-\frac{3^n}{8^n}\right)=8^n\cdot\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$

On a les deux limites suivantes:

- Puisque $8>1$, on a: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}8^n=+\infty$
- Puisque $0\leqslant\dfrac{3}{8}<1$, on a: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}1-\left(\frac{3}{8}\right)^n=1$

On en déduit la limite suivante:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}8^n-3^n=\lim_{n\mapsto+\infty}8^n\cdot\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]=+\infty$$

e. On a les transformations algébriques suivantes:

$$\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}=\frac{5^n\cdot\left(1-\dfrac{2^n}{5^n}\right)}{3^n\cdot\left(1+\dfrac{2^n}{3^n}\right)}=\frac{5^n}{3^n}\cdot\frac{1-\dfrac{2^n}{5^n}}{1+\dfrac{2^n}{3^n}}$$
$$=\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$$

On a les deux limites suivantes:

- Puisque $\dfrac{5}{3}>1$, on a: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$
- Puisque $0\leqslant\dfrac{2}{5}<1$ et $0\leqslant\dfrac{2}{3}<1$, on a:
$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$
On en déduit la limite: $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$

On en déduit la limite suivante:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=+\infty$$

f. On a les transformations algébriques suivantes:

$$\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{31}{7}\times\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{62}{56}\right)^n$$

De la comparaison $\dfrac{62}{56}>1$, on en déduit la limite suivante:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{62}{56}\right)^n=+\infty$$

Correction 5

1. Pour chaque terme de cette somme, il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que ce terme s'écrive:

$$\frac{1}{n+\sqrt{k}}$$

Ainsi, pour un entier n et pour k un entier vérifiant l'encadrement $1\leqslant k\leqslant n$, on a:

$$1\leqslant\quad k\quad\leqslant n$$
$$\sqrt{1}\leqslant\sqrt{k}\leqslant\sqrt{n}$$
$$0\leqslant n+\sqrt{1}\leqslant n+\sqrt{k}\leqslant n+\sqrt{n}$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n+\sqrt{1}}\geqslant\frac{1}{n+\sqrt{k}}\geqslant\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leqslant\frac{1}{n+\sqrt{1}}$$

L'inégalité ci-dessus encadre chaque terme de la somme; or, cette somme comporte n terme, ainsi on a l'encadrement suivant:

$$n\cdot\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant n\cdot\frac{1}{n+\sqrt{1}}$$
$$\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leqslant\frac{n}{n+\sqrt{1}}$$

2. Déterminons les deux limites suivantes:

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{n+1}\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}$$

- Pour $n>0$, on a la transformation algébrique suivante:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\cdot\big(1+\frac{1}{n}\big)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 1 = 1 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$$

On en déduit la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

- La forme indéterminée de la limite nous impose les transformations suivantes :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{n}{n\cdot\Big(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\Big)} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{n}{n\cdot\sqrt{n}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Ainsi, on a la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Avec l'aide de l'encadrement obtenu à la question 1. et du théorème des gendarmes, on obtient la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 1$$

