A. Etude de la fonction dérivée de fonctions composées

Correction 1

1. En notant u la fonction définie par :
$u(x)=x^2-x-2 \quad ; \quad \text{où } u'(x)=2x-1$

D'après la formule de dérivation de la puissance n-ième d'une fonction, on en déduit l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{1}{8}\times 3\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^2=\frac{1}{8}\times 3\cdot(2x-1)\cdot\big(x^2-x-2\big)^2$$
$$=\frac{3}{8}\cdot(2x-1)\cdot\big(x^2-x-2\big)^2$$

Un carrée étant toujours positif ou nul, déterminons les valeurs pour lesquelles s'annulent ce polynôme du second degré. Il admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times 1\times(-2)=1+8=9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-3}{2\times 1}=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+3}{2\times 1}=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Ainsi, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\frac{3}{8}\cdot(2x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-2		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :

$$f(x)=\frac{1}{8}\cdot\big(x^2-x-2\big)^3=\frac{1}{8}\cdot\Big[x^2\cdot\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)\Big]^3$$
$$=\frac{1}{8}\cdot x^6\cdot\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)^3$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1}{8}\cdot x^6=+\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty}\Big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\Big)^3=1$$

On en déduit la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=+\infty$

De même, on montre que : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1,4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. On a les deux valeurs :

- $f(1)=\dfrac{1}{8}\cdot\big(x^2-x-2\big)^3=\dfrac{1}{8}\times(-2)^3=\dfrac{1}{8}\times(-8)=-1$
- $f'(1)=\dfrac{3}{8}\cdot(2\times 1-1)\cdot\big(1^2-1-2\big)^2=\dfrac{3}{8}\times 1\times(-2)^2$
$=\dfrac{3}{8}\times 4=\dfrac{3}{2}$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite :

$$y=f'(1)\cdot\big(x-1\big)+f(1)$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot(x-1)-1$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{2}-1$$
$$y=\frac{3}{2}\cdot x-\frac{5}{2}$$

Correction 2

1. La fonction f est définie si l'expression située sous le radical a des valeurs positives ou nulles.
Déterminons le signe du polynôme du second degré situé sous le radical. Il a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=1^2-4\times 2\times 1=1-8=-7$
Le discriminant étant strictement négatif, on en déduit que ce polynôme a pour signe sur $\mathbb{R}$ le signe de son coefficient du second degré : ce polynôme est touours strictement positif.

On en déduit : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. La fonction f est définie par la racine carrée de la fonction u où :
$u(x)=2x^2+x+1 \quad ; \quad u'(x)=4x+1$
La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la racine carré, on obtient l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}}=\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$$

Le dénominateur étant strictement positif, le signe de f' ne dépend que de son numérateur :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, la fonction f admet le tablaeu de variation suivant :

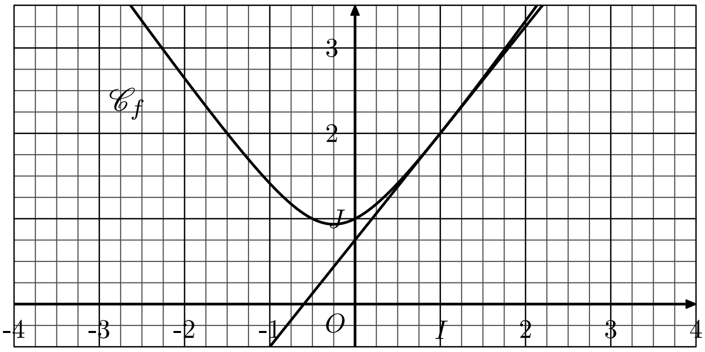
x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
Variation de f		$\searrow$		$\nearrow$	

3. a. On a les deux valeurs suivantes :

- $f(1)=\sqrt{2\times 1^2+1+1}=\sqrt{4}=2$
- $f'(1)=\dfrac{4\times 1+1}{2\cdot\sqrt{2\times 1^2+1+1}}=\dfrac{5}{2\times 2}=\dfrac{5}{4}$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 admet pour équation :

$$y = f'(1)\cdot\big(x-1\big) + f(1)$$
$$y = \frac{5}{4}\cdot\big(x-1\big)+2$$
$$y = \frac{5}{4}\cdot x - \frac{5}{4} + 2$$
$$y = \frac{5}{4}\cdot x + \frac{3}{4}$$



B. Dérivées de fonctions composées

Correction 3

a. La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = 3x^2-2x+1 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 6x-2 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= (6x-2)\sqrt{x} + (3x^2-2x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2(6x-2)\big(\sqrt{x}\big)^2 + (3x^2-2x+1)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{12x^2-4x+3x^2-2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{15x^2-6x+1}{2\sqrt{x}}$$

b. La fonction g est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{3-x}$
qui admettent pour dérivée

- $u'(x) = 2$
- Soit w la fonction définie par :
  $w(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad w'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
  La fonction v est la composée d'une fonction affine par la fonction w :
  $v(x) = w(3-x)$
  La fonction v' admet pour expression :
  $v'(x) = -1\cdot v'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= 2\cdot\sqrt{3-x} + (2x+1)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$
$$= \frac{\big(2\cdot\sqrt{3-x}\big)^2}{2\sqrt{3-x}} + \frac{-2x-1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{4(3-x)-2x-1}{2\sqrt{3-x}}$$
$$= \frac{12-4x-2x-1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{11-6x}{2\sqrt{3-x}}$$

C. Dérivées de fonctions composées de la fonction exponentielle

Correction 4

1. La fonction f est définie par la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$u(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad u'(x) = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

La formule de dérivation de la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = u'(x)\cdot \mathrm{e}^{u(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

2. La fonction g est définie par le produit des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2x\cdot\mathrm{e}^{x^2+1}$

Ainsi, la formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :
$$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\mathrm{e}^{x^2+1} + x\cdot\big(2x\cdot\mathrm{e}^{x^2+1}\big)$$
$$= \mathrm{e}^{x^2+1} + 2x^2\cdot\mathrm{e}^{x^2+1} = \mathrm{e}^{x^2+1}\cdot\big(2x^2+1\big)$$

3. La fonction h est le produit des fonctions u et v où :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$
qui admettent pour dérivée les fonctions :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction h' :
$$h'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) = 1\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + x\cdot\Big(\frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\Big)$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \Big(1+\frac{1}{x}\Big)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$$

4. La fonction j est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = \mathrm{e}^{-2x+1} \quad ; \quad v(x) = \sqrt{2x+1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x+1} \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction j' dérivée de la fonction j :

$$j'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{-2e^{-2x+1}\cdot\sqrt{2x+1} - e^{-2x+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}}{\big(\sqrt{2x+1}\big)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{-2e^{-2x+1}\cdot(2x+1) - e^{-2x+1}}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$

$$= \frac{-2e^{-2x+1}\cdot(2x+1) - e^{-2x+1}}{\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)}$$

$$= \frac{-e^{-2x-2}\cdot(4x+2) - e^{-2x+1}}{\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)} = -\frac{e^{-2x-2}\cdot(4x+3)}{\sqrt{2x+1}\cdot(2x+1)}$$

5. La fonction k est définie comme la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$u(x) = x^2 + x \quad ; \quad u'(x) = 2x+1$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction k' :
$k'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = (2x+1)\cdot e^{x^2+x}$

6. La fonction ℓ est la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$u(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 2x$

La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction g' :
$\ell'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = 2x\cdot e^{x^2+1}$

D. Dérivées de fonctions composées

Correction 5

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est la puissance 5-ième de la fonction $u(x)$ où :
$u(x) = 3x+5 \quad ; \quad u'(x) = 3$

La formule de dérivation de la puissance d'une fonction donne l'expression de la fonction f :
$$f'(x) = 5\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^4 = 5\times 3\cdot(3x+5)^4 = 15\cdot(3x+5)^4$$

b. Le dénominateur étant toujours strictement positif, la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est définie par l'inverse de la fonction u définie par :
$u(x) = 3x^4 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 12\cdot x^3$

La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction g', dérivée de la fonction g :
$$g'(x) = -\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = -\frac{12\cdot x^3}{(3x^4+11)^2}$$

c. La fonction h est la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où :
$u(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad u'(x) = 2x+1$

La formule de dérivation d'une fonction racine carrée permet d'obtenir la dérivée de h' :
$$h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

d. La fonction j est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction j est la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où :
$u(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Ainsi, la formule de dérivation de la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction j' :
$$j'(x) = \frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}} = \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x}}} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x^2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x}}}$$

E. Tangente de fonctions composées

Correction 6

1. La racine carrée d'un nombre n'est définie que si ce nombre est positif ou nul ; cherchons les valeurs pour lesquelles, le polynôme se trouvant sous le radical est positif ou nul :

Ce polynôme admet pour discriminant :
$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = (-2)^2 - 4\times 1\times 3 = 4 - 12 = -8$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, ce polynôme admet pour signe sur $\mathbb{R}$ le coefficient du terme du second degré :

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2-2x+3	$+$	

La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction g est la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où :
$u(x) = x^2 - 2x + 3 \quad ; \quad u'(x) = 2x - 2$

La formule de dérivation de la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction g' :
$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$$

On a les deux valeurs suivantes :

- $g\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = \sqrt{\Big(\dfrac{3}{2}\Big)^2 - 2\times\dfrac{3}{2} + 3}$
$= \sqrt{\dfrac{9}{4} - \dfrac{6}{2} + 3} = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$

- $g'\Big(\dfrac{3}{2}\Big) = \dfrac{\dfrac{3}{2} - 1}{\sqrt{\Big(\dfrac{3}{2}\Big)^2 - 2\times\dfrac{3}{2} + 3}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{9}{4}}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}$
$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ la tangente d'équations :

$y = g'\Big(\dfrac{3}{2}\Big)\cdot\Big(x - \dfrac{3}{2}\Big) + g\Big(\dfrac{3}{2}\Big)$

$y = \dfrac{1}{3}\cdot\Big(x - \dfrac{3}{2}\Big) + \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{1}{3}\cdot x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{1}{3}\cdot x + 1$

F. Convexité et positions des tangentes

Correction 7

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$f(x) = 3{\cdot}x - u(x){\cdot}v(x)$
où les fonctions u et v sont définies par :
$u(x) = 3{\cdot}x \quad ; \quad v(x) = \ln(x)$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{x}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 - \big[u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)\big] \\ &= 3 - \Big[3{\cdot}\ln\big(x\big) + 3{\cdot}x{\times}\frac{1}{x}\Big] = 3 - \Big[3{\cdot}\ln\big(x\big) + 3\Big] \\ &= 3 - 3{\cdot}\ln\big(x\big) - 3 = -3{\cdot}\ln\big(x\big) \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée seconde f'', dérivée de la fonction f', a pour expression :
$f''(x) = 3{\times}\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) = -\dfrac{3}{x^2}$

La dérivée seconde de la fonction f étant strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, toutes les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au-dessus de la courber $\mathscr{C}_f$. Il en est de même de la tangente T.

