Ex 1** : **Suite en mode explicite – 2 pts

Soit la suite (u_n) définie par $u_n=(n-4)^2+3$ où $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	19	12	7	4	3	4	7	12	19

<u>Conjectures :</u>

- (u_n) est croissante pour $n\geqslant 4$
- (u_n) est minorée par 3 et non majorée
- (u_n) est divergente vers $+\infty$

<u>Sens de variation :</u>

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= ((n+1-4)^2+3)-((n-4)^2+3)\\ &=(n-3)^2+3-(n-4)^2-3\\ &=n^2-6n+9-n^2+8n-16\\ &=2n-7\end{aligned}$$

on pose la fonction $f(x)=2x-7$ et on étudie son signe :
tableau de signes de f :

x	$-\infty$		3,5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

donc si $n\geqslant 4$ alors $u_{n+1}-u_n>0$
donc la suite (u_n) est croissante pour $n\geqslant 4$

<u>Convergence et Limite :</u>

$$u_n=(n-4)^2+3=n^2-8n+16+3=n^2-8n+19=n^2\left(1-\frac{8}{n}+\frac{19}{n}\right)$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{8}{n}+\frac{19}{n}\right)=1$

par produit on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$ et donc (u_n) est divergente

Ex 2** : **Suite en mode explicite – 2 pts

Soit la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{2n+1}{n-2}$ où $n\geqslant 3$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	7	4,5	3,66	3,25	3	2,83	2,71	2,62	2,55

<u>Conjectures :</u>

- (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 3$
- (u_n) est minorée par 2 et majorée par 7
- (u_n) est convergente vers 2

<u>Sens de variation :</u>

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left(\frac{2(n+1)+1}{(n+1)-2}\right)-\left(\frac{2n+1}{n-2}\right)\\ &=\frac{2n+3}{n-1}-\frac{2n+1}{n-2}\\ &=\frac{(2n+3)(n-2)-(n-1)(2n+1)}{(n-1)(n-2)}\\ &=\frac{2n^2+3n-4n-6-2n^2+2n-n+1}{(n-1)(n-2)}\\ &=\frac{-5}{(n-1)(n-2)}\end{aligned}$$

or $-5<0$ et $(n-1)(n-2)>0$ car $n\geqslant 3$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 3$

<u>Convergence et Limite :</u>

$$u_n=\frac{2n+1}{n-2}=\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}=\frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}$$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=1$

par quotient on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=2$ et donc (u_n) est convergente vers 2

Ex 3** : **Suite en mode récurrente – 3 pts

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2$, $u_0=1$ où $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	2,5	3,25	3,62	3,81	3,9	3,95	3,97	3,98

Conjectures :

- (u_n) est croissante pour $n \geqslant 0$
- (u_n) est minorée par 1 et majorée par 4
- (u_n) est convergente vers 4

Sens de variation :

$u_{n+1}-u_n=(0{,}5\,u_n+2)-u_n=-0{,}5\,u_n+2$

on pose $g(x)=-0{,}5x+2$ pour $x \in \mathbb{R}$
racine de g : $-0{,}5x+2=0$ donne $x=4$
tableau de signes de g :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Or $u_0, u_1, u_2, \ldots \in]-\infty\,;4]$ donc $u_{n+1}-u_n>0$

donc (u_n) est croissante pour $n \geqslant 0$

Convergence et Limite :
la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente vers L
la limite L vérifie le théorème du point fixe soit $\frac{1}{2}L+2=L$
donc $-0{,}5L=-2$ donc $L=4$

Ainsi la suite (u_n) est convergente vers 4

Ex 4 : ***Suite en mode récurrente – 3 pts***

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\frac{-1}{u_n+2}\,;u_0=1$ où $n \in \mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	1	-0,33	-0,5	-0,71	-0,77	-0,81	-0,84	-0,86	-0,88

Conjectures :

- (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 0$
- (u_n) est minorée par -1 et majorée par 1
- (u_n) est convergente vers -1

Sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{-1}{u_n+2}\right)-u_n=\frac{-1-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2-2\,u_n-1}{u_n+2}$$

on pose $g(x)=-x^2-2x-1$ avec $x \in \mathbb{R}$
racine de g : $x_0=-1$ car $\Delta=0$

tableau de signes de g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	

Or $u_0, u_1, u_2, \ldots \in [-1\,;+\infty[$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

donc (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 0$

Convergence et Limite :
la suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente vers L
la limite L vérifie le théorème du point fixe soit $\frac{-1}{L+2}=L$
donc $-1=L(L+2)$ donc $-1=L^2+2L$ donc $L^2+2L+1=0$
donc $(L+1)^2=0$ donc $L+1=0$ donc $L=-1$

Ainsi la suite (u_n) est convergente vers -1

Compléments de correction

Ex 4 :
Variante pour le sens de variation de (u_n) :

or $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(4-u_n)=\frac{-u_n^2-2\,u_n-1}{u_n+2}=\frac{-(u_n+1)^2}{u_n+2}$

de plus $-(u_n+1)^2<0$ et $u_n+2>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

donc (u_n) est décroissante pour $n \geqslant 0$