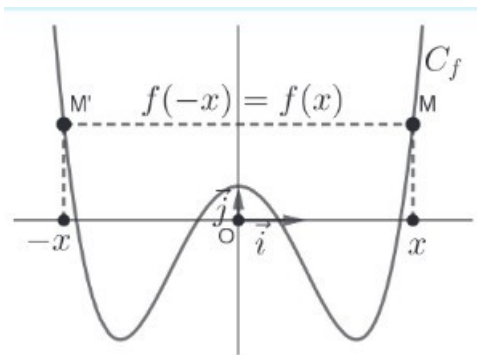


Fonctions Trigonométriques – 1ère spé

A) Les Propriétés graphiques

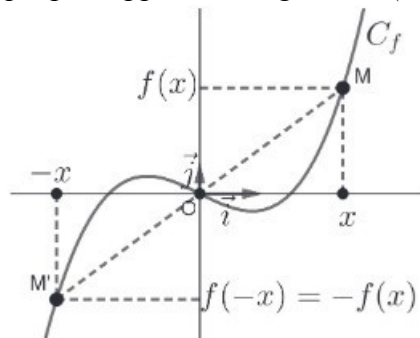
1) Parité d'une fonction

Définition : Soit f une fonction trigonométrique définie sur $[-\pi; \pi]$
 f est paire si, et seulement si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi; \pi]$
 C_f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Fonction paire

Définition : Soit f une fonction trigonométrique définie sur $[-\pi; \pi]$
 f est impaire si, et seulement si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-\pi; \pi]$
 C_f est alors symétrique par rapport à l'origine $O(0; 0)$



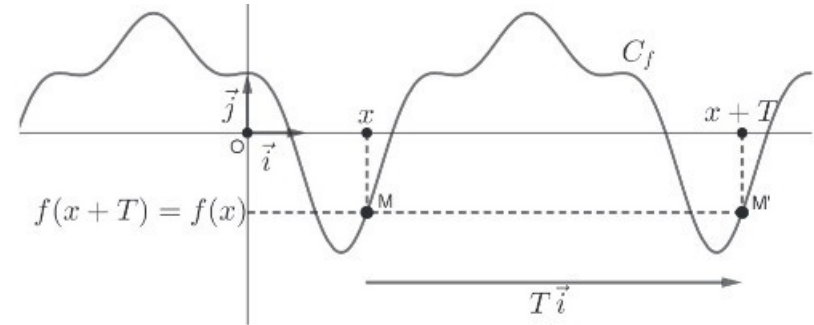
Fonction impaire

exemples :

- soit $f(x) = \cos(x)$ alors f est paire sur $[-\pi; \pi]$
- soit $f(x) = \sin(x)$ alors f est impaire sur $[-\pi; \pi]$

2) Périodicité d'une fonction

Définition : Soit f une fonction trigonométrique définie sur $[-\pi; \pi]$
 f est périodique de période T (ou T -périodique) si, et seulement si
 $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi; \pi]$
 C_f est alors identique par translation de vecteur $T \cdot \vec{i}$



Fonction T -périodique

exemples :

- soit $f(x) = \cos(x)$ alors f est 2π -périodique sur $[-\pi; \pi]$
- soit $f(x) = \sin(x)$ alors f est 2π -périodique sur $[-\pi; \pi]$

3) Le Domaine d'étude

Définition : On appelle domaine d'étude d'une fonction trigonométrique f
l'intervalle D étant le plus petit intervalle sur lequel on peut étudier f

Méthode pratique :

- Si f est paire sur $[-\pi; \pi]$ alors $D = [0; \pi]$
- Si f est impaire sur $[-\pi; \pi]$ alors $D = [0; \pi]$
- Si f est 2π -périodique alors $D = [0; 2\pi]$ ou $D = [-\pi; \pi]$
- Si f est π -périodique alors $D = [0; \pi]$ ou $D = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

exemples :

- soit $f(x) = \cos(x)$ alors $D = [0; \pi]$
- soit $f(x) = \sin(x)$ alors $D = [0; \pi]$
- soit $f(x) = \cos(2x)$ alors $D = [0; \frac{\pi}{2}]$
- soit $f(x) = \sin(4x)$ alors $D = [0; \frac{\pi}{4}]$
- soit $f(x) = \cos(\frac{x}{2})$ alors $D = [0; 2\pi]$

B) La Dérivation trigonométrique

1) Dérivées de Cosinus

Définitions : Soit $x \in [-\pi; \pi]$

- Soit $f(x) = \cos(x)$ alors $f'(x) = -\sin(x)$
- Soit $f(x) = \cos(2x)$ alors $f'(x) = -2\sin(2x)$
- Soit $f(x) = \cos(3x)$ alors $f'(x) = -3\sin(3x)$
- Soit $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ alors $f'(x) = -2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$
- Soit $f(x) = \cos(ax)$ alors $f'(x) = -a\sin(ax)$
- Soit $f(x) = \cos(ax+b)$ alors $f'(x) = -a\sin(ax+b)$

exemples : Calculer les dérivées trigonométriques suivantes

- $f(x) = 2\cos(3x)$
- $f(x) = -2\cos(4x+\pi)$
- $f(x) = 4\cos(x-\pi) + 5\cos(2x + \frac{\pi}{4})$
- $f(x) = 3\cos(-2x + \frac{\pi}{3})$

2) Dérivées de Sinus

Définitions : Soit $x \in [-\pi; \pi]$

- Soit $f(x) = \sin(x)$ alors $f'(x) = \cos(x)$
- Soit $f(x) = \sin(2x)$ alors $f'(x) = 2\cos(2x)$
- Soit $f(x) = \sin(3x)$ alors $f'(x) = 3\cos(3x)$
- Soit $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ alors $f'(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$
- Soit $f(x) = \sin(ax)$ alors $f'(x) = a\cos(ax)$
- Soit $f(x) = \sin(ax+b)$ alors $f'(x) = a\cos(ax+b)$

exemples : Calculer les dérivées trigonométriques suivantes

- $f(x) = 2\sin(3x)$
- $f(x) = -2\sin(4x+\pi)$
- $f(x) = 4\sin(x-\pi) + 5\sin(2x + \frac{\pi}{4})$
- $f(x) = 3\sin(-2x + \frac{\pi}{3})$

Rque : de la même façon on pourra définir en Terminale STL la dérivée de la fonction « tangente » : si $f(x) = \tan(x)$ alors $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

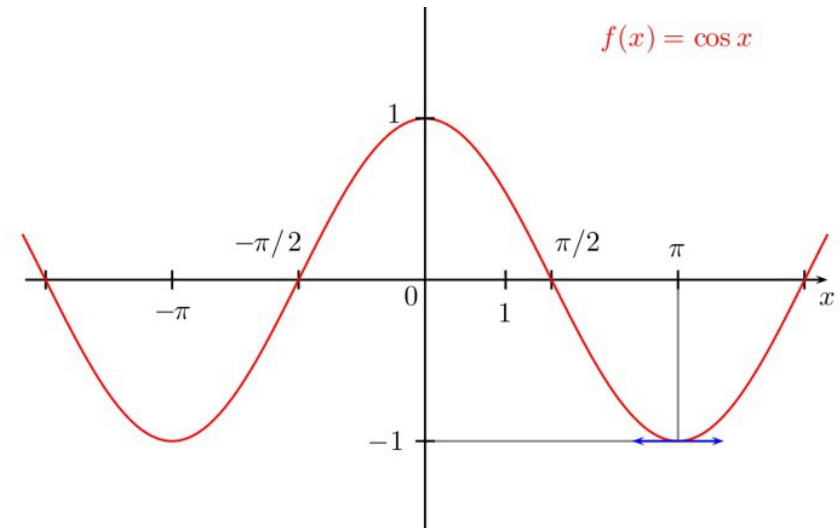
C) Études globales de fonctions trigonométriques

1) La fonction COS

Propriété : Soit la fonction « COSINUS » définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \cos(x)$; le graphique est donné ci-dessous alors le tableau de variation est le suivant

FONCTION COSINUS

x	$-\pi$	0	π
$f'(x) = -\sin x$	+	0	-
$f(x) = \cos x$	-1	1	-1



Observations graphiques :

- f est paire sur $[-\pi; \pi]$
- f est périodique avec $T = 2\pi$
- f possède 2 racines sur $[-\pi; \pi]$: $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$
- f est encadrée entre -1 et 1
- f admet 1 maximum local ($x=0$) et 2 minima locaux ($x=-\pi$; $x=\pi$)

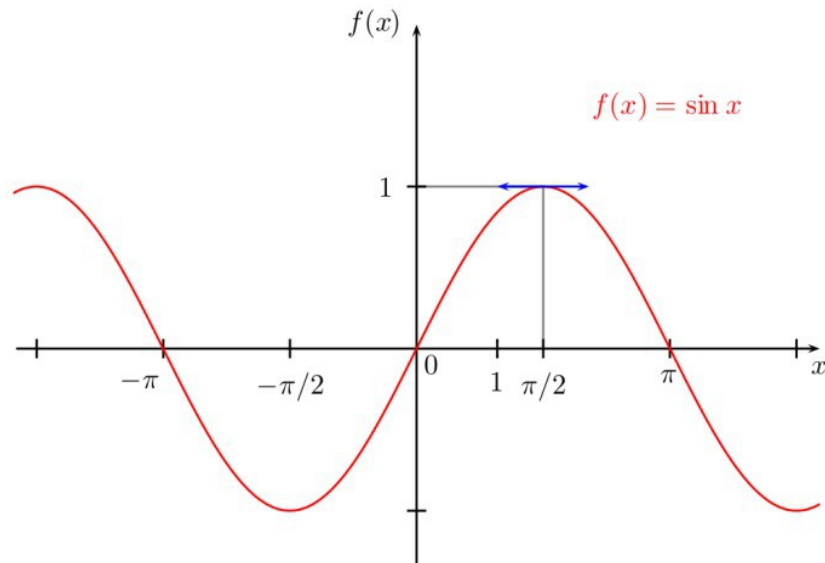
2) La fonctions SIN

Propriété : Soit la fonction « SINUS » définie sur $[-\pi; \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$
le graphique est donné ci-dessous
alors le tableau de variation est le suivant

FONCTION SINUS

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π			
$f'(x) = \cos(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x) = \sin(x)$	0		-1		1		0

→ voir l'[animation de COS & SIN](#)



Observations graphiques :

- f est paire sur $[-\pi; \pi]$
- f est périodique avec $T = 2\pi$
- f possède 2 racines sur $[-\pi; \pi]$: $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$
- f est encadrée entre -1 et 1
- f admet 1 minimum local ($x = -\pi/2$) et 1 maximum local ($x = \pi/2$)

D) Équations trigonométriques

1) Les équations avec COS

Propriété : Soit l'équation $(E): \cos(x) = \cos(a)$ alors il y a 2 solutions distinctes $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

exemples : Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans \mathbb{R}

$$(E_1): \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (E_2): \cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad (E_3): \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(E_4): \cos(2x + \pi) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad (E_5): \cos(2x + \pi) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

2) Les équations avec SIN

Propriété : Soit l'équation $(E'): \sin(x) = \sin(a)$ alors il y a 2 solutions distinctes $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

exemples : Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans \mathbb{R}

$$(E_1): \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (E_2): \sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad (E_3): \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(E_4): \sin(2x + \pi) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad (E_5): \sin(2x + \pi) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

3) Les équations trigonométriques généralisées (vers la Tale Spé)

Théorème : Soit l'équation $(E''): a \cos(x) + b \sin(x) = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ alors il y a 2 cas distincts :

- si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 1$ ou $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} < -1$ alors l'équation (E'') n'admet aucune solution
- si $-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$ alors l'équation (E'') admet 2 solutions en posant $\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\cos(\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ car (E'') devient $\cos(x - \alpha) = \cos(\beta)$

exemples : Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans \mathbb{R}

$$(E_1): 3 \cos(x) + 4 \sin(x) = 2 \quad ; \quad (E_2): 5 \cos(x) - 12 \sin(x) = 8$$