Table des matières

Dans ce chapitre, n et i désignent des entiers naturels.

I Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Définition

DÉFINITION

On considère une expérience aléatoire associée à un univers Ω.
Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$; autrement dit, X est une fonction qui, à tout élément de Ω, associe un unique **réel** : $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$

REMARQUES

- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, T, G...
- Pour tout réel k, on note l'événement « X prend la valeur k » sous la forme réduite « $X = k$ ».

On notera de façon analogue « $X < k$ », « $X \leqslant k$ », « $X > k$ » et « $X \geqslant k$ ».

2) Loi de probabilité

DÉFINITION

Lorsqu'à chaque valeur x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité de** X.
On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

PROPRIÉTÉ

En reprenant les notations précédentes, on a $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

DÉMONSTRATION

$p_1 + p_2 + ... + p_n = P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n)$.
Or les événements $X = x_i$, pour tout entier i compris entre 1 et n, sont des événements incompatibles deux à deux et dont la réunion donne l'univers de l'expérience. Ils partitionnent donc l'univers et par définition, la somme de leurs probabilités est donc égale à 1.

3) Deux exemples complets

a Lancer d'un dé

On lance un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotées 1, 1, 1, 2, 3 et 4.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro apparu.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction :
Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 et 4.
Le dé étant non pipé, chaque face a la même probabilité d'être obtenue. 3 faces ayant le chiffre 1, on a donc $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. De même, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$, $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{6}$.
La loi de probabilité de X est donc :

Valeur k	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b Tirage d'une boule dans l'urne

Un jeu consiste à tirer au hasard une boule dans une urne contenant **5 boules bleues**, **3 boules vertes** et **10 boules rouges**. Le joueur gagne **1 euro** s'il tire une boule bleue, **2 euros** s'il tire une boule verte et il perd **3 euros** s'il tire une boule rouge.
Soit G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie.
Déterminer la loi de probabilité de G.

Correction :
Les valeurs prises par G sont 1, 2 et -3.
L'événement « $G = 1$ » correspond à l'événement de tirer une boule bleue parmi les 18 boules de l'urne. Il y a 5 boules bleues, et le tirage est au hasard, donc $P(G = 1) = \frac{5}{18}$.
De même, on obtient $P(G = 2) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ et $P(G = -3) = \frac{5}{9}$.
Donc la loi de probabilité de G est :

Valeur k	1	2	-3
$P(G = k)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$

II Espérance, variance et écart-type

Dans toute cette partie, on appelle X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.

1) Espérance

a Définition

DÉFINITION

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre **réel** noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

avec pour tout entier i compris entre 1 et n, $p_i = P(X = x_i)$.

REMARQUE

L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

EXEMPLE

On reprend l'exemple du tirage dans l'urne précédent. La loi de probabilité de G est :

Valeur k	1	2	-3
$P(G = k)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$

Donc $E(G) = 1 \times \dfrac{5}{18} + 2 \times \dfrac{1}{6} + (-3) \times \dfrac{5}{9} = -\dfrac{19}{18} \approx 1,06$.
Ainsi, si on répète un grand nombre de fois le jeu du tirage de bouges, on perdra en moyenne 1,06 euros. Cette espérance étant négative, le jeu n'est pas favorable au joueur mais à l'organisation. D'où la remarque suivante :

REMARQUE

Si X est une variable aléatoire égale à un gain algébrique dans une expérience aléatoire représentant un jeu, alors :

- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est dit favorable au joueur (et défavorable à l'organisateur).
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est dit défavorable au joueur (et favorable à l'organisateur).
- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est dit équitable.

b Linéarité de l'espérance

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

DÉMONSTRATION

Si X prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, alors $aX+b$ prend les valeurs ax_1+b, ax_2+b, ..., ax_n+b et on a :

$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $X = x_i \Leftrightarrow aX+b = ax_i+b$ d'où $P(aX+b = ax_i+b) = P(X = x_i)$.

Ainsi, en posant $p_i = P(X = x_i)$, on a :

$E(aX+b) = \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b)P(aX+b = ax_i+b) = \sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i = \sum\limits_{i=1}^{n} ax_ip_i + \sum\limits_{i=1}^{n} bp_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} p_ix_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$.

Or $\sum\limits_{i=1}^{n} p_ix_i = E(X)$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Donc $E(aX+b) = aE(X)+b$.

2) Variance et écart-type

a Définitions

DÉFINITION

La variance de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

REMARQUE

La variance de X est la moyenne des carrés des écarts des valeurs de X à l'espérance de X.
On a ainsi : $V(X) = E((X-E(X))^2)$.

DÉFINITION

L'écart-type de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

b Deux propriétés de la variance

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire. Alors on a la **Formule de König-Huyghens** :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

DÉMONSTRATION

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2 - 2x_iE(X) + E(X)^2) = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + E(X)^2\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Or $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 = E(X^2)$; $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Donc $V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$V(aX+b) = a^2V(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - E(aX+b))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - (aE(X)+b))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i - aE(X))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_ia^2(x_i - E(X))^2 \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(aX+b) &= \sqrt{V(aX+b)} \\
&= \sqrt{a^2V(X)} \\
&= |a|\sqrt{V(X)} \\
&= |a|\sigma(X)
\end{aligned}$$