Ex1 : 1) $x^2+3\sqrt{2}x+4=0$ , $\Delta=(3\sqrt{2})^2-4\times1\times4=2>0 \Rightarrow$ il y a 2 racines.

$x_1=\dfrac{-3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}$ et $x_2=\dfrac{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ donc $S=\{-2\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\}$

2) $x^2-(2+\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})=0$.

On observe, en posant $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{3}$ que : $x^2-(x_1+x_2).x+(x_1\times x_2)=0$.

Donc, on déduit que : $S=\{1\,;1+\sqrt{3}\}$.

3) $x^3-8x^2+12x=0 \Leftrightarrow (x)(x^2-8x+12)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-8x+12=0$.

$x^2-8x+12=0$ donne $\Delta=(-8)^2-4\times1\times12=16>0 \Rightarrow$ il y a 2 racines.

$x_1=\dfrac{8-\sqrt{16}}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{8+\sqrt{16}}{2}=6$ donc $S=\{0\,;2\,;6\}$.

Ex2 : $(E_m) : (m-1)x^2-2x+(1-m)=0$.

1) $(E_0) : -x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0$, $\Delta=8$, $S=\{-1-\sqrt{2}\,;-1+\sqrt{2}\}$.

$(E_2) : x^2-2x-1=0$, $\Delta=8$, $S=\{1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\}$.

$(E_{-1}) : -2x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$, $\Delta=5$, $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2) $\Delta_m=(-2)^2-4(m-1)(1-m)=4+4(m-1)^2=4\left[1+(m-1)^2\right]>0$.

3) $\forall m\in\mathbb{R}$, $\Delta_m>0$ donc l'équation $(E_m)$ possède toujours 2 racines $x_1, x_2$.

$x_1=\dfrac{2-\sqrt{\Delta_m}}{2(m-1)}=\dfrac{1-\sqrt{1+(m-1)^2}}{m-1}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+(m-1)^2}}{m-1}$.

On effectue une disjonction de cas :

* Si $m<1$ alors $m-1<0$ donc $1-\sqrt{1+(m-1)^2}<0$

Ainsi, $x_1>0$ et $x_2<0$ donc $x_1$ et $x_2$ sont de 2 signes contraires.

* Si $m=1$ alors $(E_m)$ n'existe pas !

* Si $m>1$ alors $m-1>0$ donc $1-\sqrt{1+(m-1)^2}<0$

Ainsi, $x_1<0$ et $x_2>0$ donc $x_1$ et $x_2$ sont de 2 signes contraires.

Conclusion : $\forall m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $x_1$ et $x_2$ sont de signes contraires.

Rque : On aurait pu également montrer que :

$\forall m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ : $x_1\times x_2<0$.