1ère B spé **DL n°4 – La Dérivation - Correction** **janv 2022**

Ex 1 : (*) – Lectures graphiques du nombre dérivé – 3 pts

1) On a le tableau suivant :

x	-6	-3	-1	3	6
$f(x)$	-1	-2	1	3	0
$f'(x)$	-1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$

2) On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$ et $h = 0,12$, et on dérive $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On a alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) \iff f(9,12) \approx f(9) + 0,12 f'(9) \iff$$
$$\sqrt{9,12} \approx \sqrt{3} + 0,12 \times \frac{1}{2\sqrt{9}} \iff \sqrt{9,12} \approx 3,02$$

Valeur à comparer avec la valeur que donne la calculatrice : $\approx 3,019\,933$.

Les équations des tangentes sont :

$(T_{-6}) : y = -x - 7$; $(T_{-3}) : y = x + 1$; $(T_{-1}) : y = \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

$(T_3) : y = 3$; $(T_6) : y = -0,5x + 3$

Ex 2 : (*) – Autour de la définition de la dérivée – 3 pts

1) La définition analytique du nombre dérivé de f en 1 : $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

2) On donne $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$.

a) L'équation de la tangente (T) en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(x) = 10x - 6 \Rightarrow f'(1) = 4$ et $f(1) = 1$

(T) : $y = 4(x-1) + 1 \iff y = 4x - 3$

b) Il faut résoudre : $f'(x) = -2 \iff 10x - 6 = -2 \iff x = \dfrac{2}{5}$

Il existe une tangente à $\mathscr{C}_f$ parallèle à la droite $y = -2x + 5$ pour $x = \dfrac{2}{5}$

Ex 3 : (**) – Calculs de dérivées – 8 pts

Fonction	Dérivabilité	Dérivée
1) $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 3x + 2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 12x^2 - 18x + 3 = 3(4x^2 - 6x + 1)$
2) $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{6}{x^4}$.
3) $f(x) = \sqrt{4x+1}$	$\left]-\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$	$f'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$
4) $f(x) = \dfrac{4}{1+3x}$	$\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$	$f'(x) = \dfrac{4 \times (-3)}{(1+3x)^2} = \dfrac{-12}{(1+3x)^2}$
5) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{x^2 + 9 - 2x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{9 - x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{(3-x)(3+x)}{(x^2+9)^2}$
6) $f(x) = x\sqrt{2x-3}$	$\left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$	$f'(x) = \sqrt{2x-3} + \dfrac{2x}{2\sqrt{2x-3}} = \dfrac{2x - 3 + x}{\sqrt{2x-3}} = \dfrac{3(x-1)}{\sqrt{2x-3}}$
7) $f(x) = x - \dfrac{4x+1}{7x+2}$	$\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{7}\right\}$	$f'(x) = 1 - \dfrac{4(7x+2) - 7(4x+1)}{(7x+2)^2} = 1 - \dfrac{1}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+2)^2 - 1}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+2-1)(7x+2+1)}{(7x+2)^2} = \dfrac{(7x+1)(7x+3)}{(7x+2)^2}$
8) $f(x) = (3x+5)^4$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 4 \times 3(3x+5)^3 = 12(3x+5)^3$

Ex 4 : (***) – Étude globale d'une fonction– 6 pts

1) $D_f = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \geqslant 2 > 0$ (ne s'annule pas).

2) $f'(x) = \dfrac{8(x^2+2) - 2x(8x+4)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8x^2 + 16 - 16x^2 - 8x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-8x^2 - 8x + 16}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8(-x^2 - x + 2)}{(x^2+2)^2}$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{8x+4}{x^2+2}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

3) $f'(x) = 0 \iff -x^2 - x + 2 = 0$ d'où $x_1 = 1$ racine évidente, $P = -2$ donc $x_2 = -2$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$$f(-2) = \frac{-16+4}{4+2} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$f(1) = \frac{8+4}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$$

4) Quand x devient "très grand" alors $8x+4 \approx 8x$ et $x^2+2 \approx x^2$ donc $f(x) \approx \dfrac{8x}{x^2} \approx \dfrac{8}{x}$.
Comme 8 sur "très grand" devient "très petit" alors $f(x)$ tend vers 0.

5) La tangente (T) en 0 a comme équation : $y = f'(0)x + f(0)$

$f(0) = 2$ et $f'(0) = \dfrac{16}{4} = 4$ donc (T) : $y = 4x + 2$.

6) D'après le tableau de variation : $\forall x \in \mathbb{R},\ -2 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

7) Pour tracer (T), on peut prendre les points $(-1\,;-2)$ et $(0\,;\,2)$.
Pour tracer $\mathscr{C}_f$, on peut calculer en plus deux images : $f(-7) \approx -1$ et $f(6) \approx 1,4$

Graphique complet