Correction 1

Tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.

Pour étudier la monotonie de la suite, étudions le quotient de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}} = \frac{3^{n+1}}{4}\times\frac{4}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$$

Le quotient étant strictement supérieur à 1 pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Correction 2

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \dfrac{n}{2^{n+1}} > 0$

Ainsi, tous les termes de la suite (u_n) sont positifs. Ainsi, pour étudier la monotonie de la suite (u_n), étudions le quotient de deux termes consécutifs de cette suite :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)+1}}}{\frac{n}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+2}}}{\frac{n}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{n+1}{2^{n+2}}\times\frac{2^{n+1}}{n} = \frac{n+1}{n}\times\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} = \frac{n+1}{2\cdot n}$$

Cherchons pour quelles valeurs de n, ce quotient est inférieur à 1 :

$$\frac{n+1}{2\cdot n} < 1$$
$$\frac{n+1}{2\cdot n} - 1 < 0$$
$$\frac{n+1}{2\cdot n} - \frac{2n}{2\cdot n} < 0$$
$$\frac{1-n}{2\cdot n} < 0$$

Le dénominateur étant positif, on en déduit le signe du quotient pour $n\geqslant 2$: $\dfrac{1-n}{2\cdot n}<0$.

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 2$.

Correction 3

1. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-(n+1)}{1+(n+1)} - \frac{1-n}{1+n}$$
$$= \frac{1-n-1}{n+2} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n}{n+2} - \frac{1-n}{1+n}$$
$$= \frac{-n(1+n)}{(n+2)(1+n)} - \frac{(1-n)(n+2)}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)} - \frac{n+2-n^2-2n}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2}{(n+2)(1+n)} - \frac{2-n^2-n}{(1+n)(n+2)}$$
$$= \frac{-n-n^2-2+n^2+n}{(1+n)(n+2)} = \frac{-2}{(1+n)(n+2)}$$

2. Pour tout entier naturel n, pour le quotient exprimant la différence de deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$:
   - le numérateur est strictement négatif ;
   - le dénominateur du quotient est strictement positif pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   On en déduit le signe du quotient :
$$\frac{-2}{(1+n)(n+2)} < 0$$
$$u_{n+1} - u_n < 0$$
$$u_{n+1} < u_n$$
   Ainsi, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Correction 4

Pour connaître le sens de variation de la suite (u_n), nous allons étudions la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+10}{2(n+1)} - \frac{n^2+10}{2n}$$
$$= \frac{n^2+2n+1+10}{2(n+1)} - \frac{n^2+10}{2n}$$
$$= \frac{n\cdot(n^2+2n+11)-(n^2+10)(n+1)}{2\cdot n\cdot(n+1)}$$
$$= \frac{n^3+2n^2+11n-(n^3+10n+n^2+10)}{2\cdot n\cdot(n+1)} = \frac{n^2+n-10}{2\cdot n\cdot(n+1)}$$

L'entier n étant strictement positif, le dénominateur du quotient précédent est nécessairement positif ; ainsi, le signe du quotient ne dépend que du signe du numérateur.

Etudions le polynôme x^2+x-10 ; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c = 1^2 - 4\times1\times(-10) = 1+40 = 41$$

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \approx -3{,}7 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{41}}{2} \approx 2{,}7$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, nous allons obtenir le tableau de signes de ce polynôme.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-10		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on obtient le tableau de signes pour la différence $u_{n+1}-u_n$:

n	0		2		3		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$-$				$+$	

Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante à partir du rang 3.

Correction 5

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sqrt{2(n+1)-1}-\sqrt{2n-1}\\
&= \sqrt{2n+2-1}-\sqrt{2n-1}\\
&= \frac{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\left(\sqrt{2(n+1)-1}+\sqrt{2n-1}\right)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\
&= \frac{\big(2n+1\big)-\big(2n-1\big)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2n+1-2n+1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\\
&= \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \ > \ 0
\end{aligned}
$$

2. On a les comparaisons suivantes :

$$
\begin{aligned}
&> 0\\
u_{n+1}-u_n &> 0
\end{aligned}
$$

On en déduit que la suite $\big(u_n\big)$ est une suite croissante sur $\mathbb{N}^*$.

