Partie A : Lecture graphique et tracé de tangente

Exercice 1

d_1 : Le coefficient directeur est 2.

d_2 : Le coefficient directeur est -1.

d_3 : Le coefficient directeur est 0.

d_4 : Le coefficient directeur est $-\frac{1}{3}$.

d_5 n'a pas de coefficient directeur.

d_6 : Le coefficient directeur est $\frac{1}{6}$.

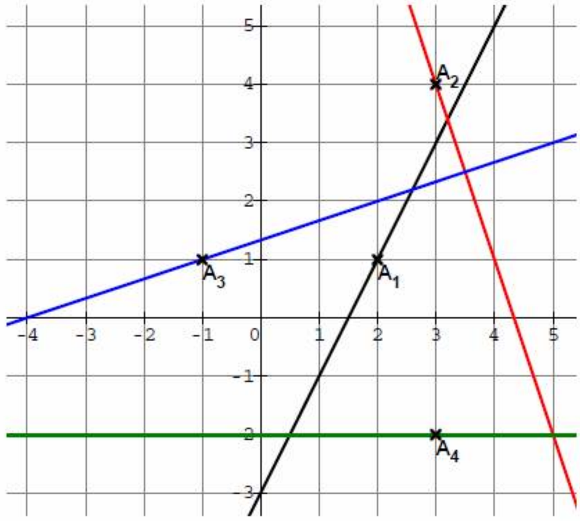
Exercice 2

1) L'équation réduite de la droite cherchée est $y = 2x + b$. Comme A appartient à cette droite, les coordonnées de A vérifient l'équation d'où $1 = 2 \times 2 + b$ ou encore $b = -3$. L'équation cherchée est donc $\boxed{y = 2x - 3}$.

2) L'équation réduite de la droite cherchée est $y = -3x + b$. Comme A appartient à cette droite, les coordonnées de A vérifient l'équation d'où $4 = -3 \times 3 + b$ ou encore $b = 13$. L'équation cherchée est donc $\boxed{y = -3x + 13}$.

3) L'équation réduite de la droite cherchée est $y = \frac{1}{3}x + b$. Comme A appartient à cette droite, les coordonnées de A vérifient l'équation d'où $1 = \frac{1}{3} \times (-1) + b$ ou encore $b = \frac{4}{3}$. L'équation cherchée est donc $\boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}}$.

4) L'équation réduite de la droite cherchée est $y = b$. Comme A appartient à cette droite, les coordonnées de A vérifient l'équation d'où $b = -2$. L'équation cherchée est donc $\boxed{y = -2}$.



Exercice 3

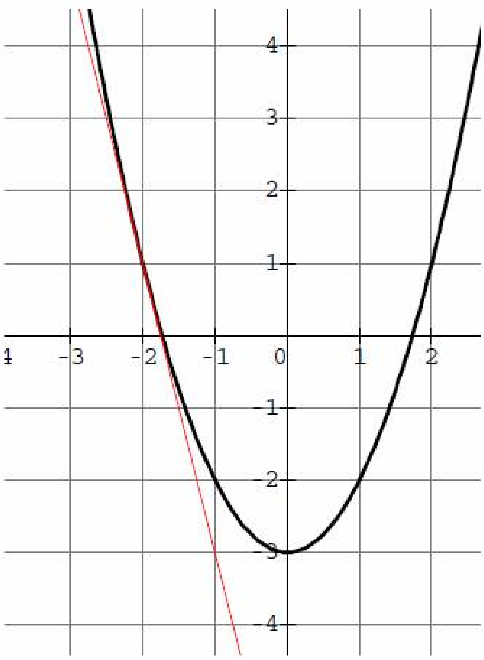
1) $f'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3, donc au point D. Graphiquement, on a $\boxed{f'(3) = 3}$

2) $f'(-5)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point A donc $\boxed{f'(-5) = 4}$

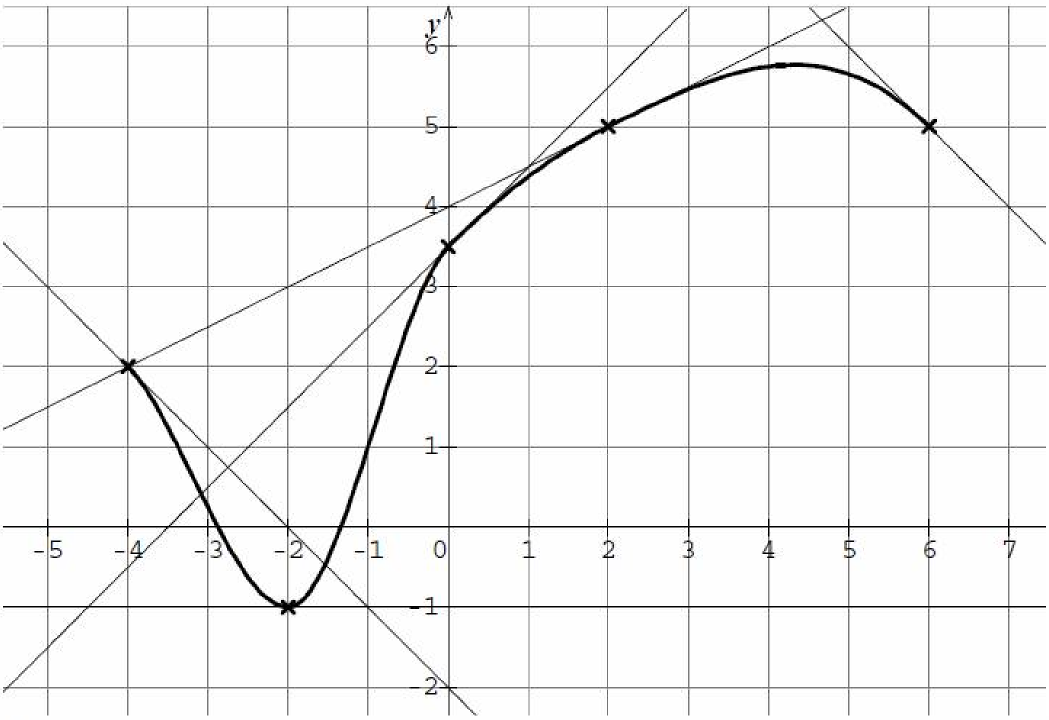
$f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point B donc $\boxed{f'(-3) = 0}$

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point C donc $\boxed{f'(0) = -1}$

Exercice 4



Exercice 5



Partie B : Taux de variations

Exercice 1

1) Pour h réel : $f(5) = 5^2 = \boxed{25}$ et $f(5+h) = (5+h)^2 = \boxed{25 + 10h + h^2}$
2) Pour h non nul :

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{25 + 10h + h^2 - 25}{h} = \frac{10h + h^2}{h} = \boxed{10 + h}$$

3) Quand h prend des valeurs proches de 0, $10 + h$ est proche de 10 donc $\boxed{f'(5) = 10}$

Exercice 2

1) Pour $h > 0$

$$\frac{d(h) - d(0)}{h} = \frac{h^2 + 5h - 0}{h} = \boxed{h + 5}$$

2) Quand h est proche de 0, $\frac{d(h)-d(0)}{h}$ est proche de 5 donc $\boxed{d'(0) = 5}$
3) Pour déterminer la vitesse instantanée à $t = 10\ s$, on doit déterminer $d'(10)$ donc calculer $\frac{d(10+h)-d(10)}{h}$

$$\frac{d(10+h) - d(10)}{h} = \frac{(10+h)^2 + 5(10+h) - (10^2 + 5 \times 10)}{h} = \frac{100 + 20h + h^2 + 50 + 5h - 150}{h} = 25 + h$$

Quand h est proche de 0, ce rapport est proche de 25 donc la vitesse instantanée à $t = 10\ s$ est de $25\ m.s^{-1}$.

Exercice 3

1) Pour x et y réels :

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

2) $(2+h)^3 - 8 = (2+h)^3 - 2^3 = (2 + h - 2)((2+h)^2 + 2(2+h) + 2^2) = h(12 + 6h + h^2)$
3) Pour h non nul :

$$\frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = 12 + 6h + h^2$$

Quand h prend des valeurs proches de 0, ce rapport est proche de 12 donc le nombre dérivée de la fonction cube en 2 est $\boxed{12}$.

Exercice 4

1) Pour $h > 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1}$$

2) Quand h est proche de 0, ce rapport est proche de $\frac{1}{2}$ donc f est dérivable en 1 est $\boxed{f'(1) = \frac{1}{2}}$

Exercice 5
Pour h non nul :
$$\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=\frac{\frac{1}{-2+h-3}-\frac{1}{-2-3}}{h}=\frac{1}{h}\times\left(\frac{1}{h-5}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{h}\times\left(\frac{5}{5(h-5)}+\frac{h-5}{5(h-5)}\right)=\frac{1}{h}\times\frac{h}{5(h-5)}$$
$$=\frac{1}{5(h-5)}$$
Pour h proche de 0, ce rapport est proche de $-\frac{1}{25}$ donc f est dérivable en -2 et $\boxed{f'(-2)=-\frac{1}{25}}$

Exercice 6
Pour h tel que $2+h>0$:
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\sqrt{1+h+2}-\sqrt{3}}{h}=\frac{(\sqrt{h+3}-\sqrt{3})(\sqrt{h+3}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{h+3}+\sqrt{3})}=\frac{h+3-3}{h(\sqrt{h+3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{h+3}+\sqrt{3}}$$
Quand h est proche de 0, ce rapport est proche de $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ donc f est dérivable en 1 et $\boxed{f'(1)=\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

<u>Partie C : Calcul de dérivées</u>
Exercice 1
1) $f'(x)=2x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc $\boxed{f'(-5)=-10}$
2) $f'(x)=3x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc $\boxed{f'(2)=12}$
3) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour tout x strictement positif donc $\boxed{f'(4)=\frac{1}{4}}$
4) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ pour tout x non nul donc $\boxed{f'(3)=-\frac{1}{9}}$

Exercice 2
1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x$ donc $f'(2)=4$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ or $f(2)=4$. Une équation est donc $y=4(x-2)+4$ soit $\boxed{y=4x-4}$
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=2x$ donc $f'(-3)=-6$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -3 est $y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$ or $f(-3)=9$. Une équation est donc $y=-6(x+3)+9$ soit $\boxed{y=-6x-9}$
3) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ donc $f'(3)=-\frac{1}{9}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 est $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ or $f(3)=\frac{1}{3}$. Une équation est donc $y=-\frac{1}{9}(x-3)+\frac{1}{3}$ soit $\boxed{y=-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}}$
4) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(4)=\frac{1}{4}$. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 est $y=f'(4)(x-4)+f(4)$ or $f(4)=2$. Une équation est donc $y=\frac{1}{4}(x-4)+2$ soit $\boxed{y=\frac{1}{4}x+1}$

Exercice 3
Dans chaque cas, justifier que f est dérivable en précisant l'ensemble de dérivabilité puis calculer $f'(x)$.
1) $f:x\mapsto 2x^2+3x$

f est une somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x)=4x+3}$
2) $f:x\mapsto 2x+1$

f est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x)=2}$
3) $f:x\mapsto -4x+6$

f est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x)=-4}$
4) $f:x\mapsto 3x^5-2x^2$

f est une somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x)=15x^4-4x}$
5) $f:x\mapsto 2\sqrt{x}+4x$

f est la somme d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+4}$

6) $f: x \mapsto -x^3 + x^2\sqrt{2} + 4x$

f est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x) = -3x^2 + 2x\sqrt{2} + 4}$

7) $f: x \mapsto x\sqrt{x}$

f est de la forme uv avec $u: x \mapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}}$$

8) $f: x \mapsto x^2(2x+4)$

f est de la forme uv avec $u: x \mapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto 2x + 4$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x(2x+4) + 2x^2 = \boxed{6x^2 + 8x}$$

9) $f: x \mapsto 4x(x-5)$

f est de la forme uv avec $u: x \mapsto 4x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto x - 5$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4$ et $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4(x-5) + 4x = \boxed{8x - 20}$$

10) $f: x \mapsto x^3(x - \sqrt{x})$

f est de la forme uv avec $u: x \mapsto x^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v: x \mapsto x - \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3x^2(x - \sqrt{x}) + x^3\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 4x^3 - 3x^2\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{x} = \boxed{4x^3 - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}}$$

11) $f: x \mapsto \frac{1}{x-3}$

f est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v: x \mapsto x - 3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en 3 avec $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ et

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = \boxed{-\frac{1}{(x-3)^2}}$$

12) $f: x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$

f est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v: x \mapsto x^2 - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en 1 et en -1 avec $v'(x) = 2x$ donc f est dérivable sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ et

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = \boxed{-\frac{2x}{(x^2-1)^2}}$$

13) $f: x \mapsto \frac{2}{x+4}$

f est de la forme $k \times \frac{1}{v}$ avec $v: x \mapsto x + 4$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en -4 et $k = 2$ donc f est dérivable sur $]-\infty; -4[$ et sur $]-4; +\infty[$ et

$$f'(x) = k \times \left(-\frac{v'(x)}{v(x)^2}\right) = \boxed{-\frac{2}{(x+4)^2}}$$

14) $f: x \mapsto -\frac{5}{x^2+1}$

f est de la forme $k \times \frac{1}{v}$ avec $k = -5$ et $v: x \mapsto x^2 + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas avec $v'(x) = 2x$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = k \times \left(-\frac{v'(x)}{v(x)^2}\right) = -5 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = \boxed{\frac{10x}{(x^2+1)^2}}$$

15) $f: x \mapsto \frac{2x+1}{x-3}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto 2x + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2$ et $v: x \mapsto x - 3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en 3 avec $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2} = \boxed{-\frac{7}{(x-3)^2}}$$

16) $f: x \mapsto \frac{2x^2}{x+3}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u: x \mapsto 2x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 4x$ et $v: x \mapsto x + 3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en -3 avec $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{4x(x+3)-2x^2}{(x+3)^2}=\boxed{\frac{2x^2+12x}{(x+3)^2}}$$

17) $f:x\mapsto\frac{2x^2+5x+1}{x^2+1}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u:x\mapsto 2x^2+5x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x)=4x+5$ et $v:x\mapsto x^2+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas avec $v'(x)=2x$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{(4x+5)(x^2+1)-(2x^2+5x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\boxed{\frac{-5x^2+2x+5}{(x^2+1)^2}}$$

18) $f:x\mapsto\frac{2\sqrt{x}+3}{x}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u:x\mapsto 2\sqrt{x}+3$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $v:x\mapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant en 0 avec $v'(x)=1$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\times x-\left(2\sqrt{x}+3\right)}{x^2}=\boxed{\frac{-\sqrt{x}-3}{x^2}}$$

19) $f:x\mapsto(2x+1)^2$

f est de la formu $u\times v$ avec $u:x\mapsto 2x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v:x\mapsto 2x+1$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2(2x+1)+2(2x+1)=\boxed{8x+4}$

Remarque : on pouvait aussi développer le carré et ensuite calculer la dérivée.

Remarque : on pouvait aussi développer le carré et ensuite calculer la dérivée.

20) $f:x\mapsto x^2(x+3)$

f est de la forme uv avec $u:x\mapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x)=2x$ et $v:x\mapsto x+3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $v'(x)=1$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2x(x+3)+x^2=\boxed{3x^2+6x}$

21) $f:x\mapsto\frac{x^4}{4}-3x^2+\frac{x}{5}-3$

f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x)=\frac{1}{4}\times 4x^3-3\times 2x+\frac{1}{5}=\boxed{x^3-6x+\frac{1}{5}}$$