exercice 1

Forme canonique
Donner la forme canonique des fonctions polynômes f du second degré définies par :

1. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

2. $f(x) = -x^2 -2/3\ x - 1/9$

3. $f(x) = 5/2\ x^2 + 15x + 30$

exercice 2

Équation du second degré
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-x^2 + 6x -10 = 0$

2. $x^2 + 4x - 21 = 0$

3. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

exercice 3

Factorisation
Factoriser les expressions suivantes :

1. $x^2 + 4x -21$

2. $8x^2 + 8x + 2$

3. $-3x^2 + 7x -8$

exercice 4

Signe
Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de :

1. $f_1(x) = 8x^2 + 8x + 2$

2. $f_2(x) = 2x^2 - 3x + 2$

3. $f_3(x) = -x^2 -3x + 10$
Sans calculer $f_3(-7)$, $f_3(1/2)$, $f_3(148)$, indiquer les signes de ces nombres.

exercice 5

Inéquations du second degré
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x^2 - 3x + 2 < 0$

2. $8x^2 + 8x + 2 \leqslant 0$

3. $-x^2 -3x + 10 < 0$

exercice 6

Somme et produit des racines
1. Résoudre mentalement les équations suivantes :
   a) $3x^2 + 7x - 10 = 0$
   b) $2x^2 + 9x + 7 = 0$

2. Vérifier que 2 est racine de l'équation : $x^2 + 11x - 26 = 0$.
Quelle est l'autre racine ?

3. Écrire une équation du second degré admettant les nombres 3 et -5 pour racines.

4. Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ? si oui, les calculer.

exercice 7

Sens de variation et représentation graphique
1. Ecrire la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 + 12x - 9$
Dresser son tableau de variations et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

2. La courbe représentative (P) d'une fonction polynôme f du second degré admet pour sommet le point S(1;2) ; Elle passe aussi par les points A(-1;0) et B(3;0) .

- Dessiner (P).
- Dresser le tableau de variation de f.
- Expliciter f(x) (donner l'écriture de f(x))
- Résoudre graphiquement, après avoir tracé (P) de façon précise :
  - l'équation $f(x) = 3/2$
  - l'inéquation $f(x) \geqslant 0$

Correction

exercice 1

Rappel :

La forme canonique d'un polynôme est $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right]$ avec $\Delta = b^2 - 4ac$

1. f(x) a pour forme canonique : $2[(x-2)^2 - 1]$

2. f(x) a pour forme canonique : $-(x+(1/3))^2$

3. f(x) a pour forme canonique : $5/2[(x+3)^2 + 3]$

exercice 2

1. $\Delta < 0$ donc $-x^2 + 6x - 10 = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$

2. $\Delta > 0$ donc $x^2 + 4x - 21 = 0$ admet deux racines réelles $x_1 = \left(-b-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ et $x_2 = \left(-b+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
$S = \{-7; 3\}$

3. $\Delta = 0$ donc $9x^2 + 6x + 1 = 0$ admet une racine double $x = \frac{-b}{2a}$
$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

exercice 3

1. $\Delta > 0$ donc $x^2 + 4x - 21$ se factorise en : $(x + 7)(x - 3)$.

2. $\Delta = 0$donc $8x^2 + 8x + 2$se factorise en : $8\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

3. Δ< 0 donc $-3x^2 + 7x - 8$ ne se factorise pas

exercice 4

1. Δ= 0 donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul

2. Δ< 0 donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif.

3. Δ> 0 donc $-x^2 - 3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de - a à l'intérieur.
Or $-x^2 - 3x + 10$ admet comme racines 2 et - 5
Donc $-x^2 - 3x + 10 > 0$ lorsque x appartient à]-5 ;2[
$-x^2 - 3x + 10 < 0$ lorsque x appartient à $]-\infty; -5[\cup]2 ; +\infty[$
$-x^2 - 3x + 10 = 0$ lorsque x = -5 ou x = 2
$f_3(-7) < 0$, $f_3(1/2) > 0$ et $f_3(148) < 0$

exercice 5

1. Δ< 0 donc $2x^2 - 3x + 2$ est strictement du signe de a donc $2x^2 - 3x + 2$ est positif. Donc $S = \varnothing$

2. Δ= 0 donc $8x^2 + 8x + 2$ est du signe de a donc $8x^2 + 8x + 2$ est positif ou nul. Donc $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

3. Δ> 0 donc $-x^2 - 3x + 10$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de - a à l'intérieur.
Or $-x^2 - 3x + 10$ admet comme racines 2 et - 5.Donc $S =]-\infty; -5[\cup]2; +\infty[$

exercice 6

1. **Résoudre mentalement les équations suivantes :**
a) $3x^2 + 7x - 10 = 0$
$\boxed{x = 1}$
b) $2x^2 + 9x + 7 = 0$
$\boxed{x = -1}$

2. **Vérifier que 2 est racine de l'équation** $x^2 + 11x - 26 = 0$
On remplace $x$par 2, si le polynôme s'annule 2 est bel et bien une racine de l'équation ci-dessus.

$(2)^2 + 11 \times 2 - 26$
$= 4 + 22 - 26$
$= 0$

<u>Quelle est l'autre racine ?</u>

Dans le cas d'un polynôme du second degrès de type $ax^2 + bx + c$, le produit des deux racines et de a vaut c, autrement dit : $\alpha_1 \times \alpha_2 \times a = c$.

Ici on a $\alpha_1 = 2, a = 1, c = -26$, par conséquent $\boxed{\alpha_2 = -13}$

3. **Écrire une équation du second degrès admettant les nombres 3 et -5 pour racines.**

Le polynôme recherché admet pour racines a et b, il est alors factorisable en $P(x) = (x-a)(x-b)g(x)$, avec $g(x)$ un autre polynôme de degrès Deg(P)-2 . Ici comme le polynôme P est de degrès 2, on peut le mettre sous la forme : $k(x-3)(x+5)$, soit $kx^2 + 2kx - 15k = 0$. Par exemple avec $k = 1$, on a : $x^2 + 2x - 15 = 0$. Et 3 et -5 sont des racines évidentes de cette équation.

4. **Existe-t-il deux nombres ayant pour somme 9 et pour produit -70 ? Si oui, les calculer.**

On doit résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x \times y = -70 \end{cases}$$

On isole une des deux variables de la deuxième équation, puis on la remplace dans la première, ce qui aboutit à une équation du deuxième degrès que l'on pourra résoudre :

$x \times y = -70$

$x = \dfrac{-70}{y}$ On remplace x dans la première ligne du système :

$\dfrac{-70}{y} + y = 9$

$\dfrac{y^2 - 70}{y} = 9$

$y^2 - 70 = 9y$

$y^2 - 9y - 70 = 0$

On remarque que ce polynôme aurait bien pu admettre comme variable x, après avoir effectuer le discriminant, on aura 2 racines qui correspondront à x et y (peu importe).

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-9)^2 - 4(1 \times -70)$
$\Delta = 81 + 280$
$\Delta = 361$

$\alpha_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\alpha_1 = \dfrac{9 - 19}{2}$

$\boxed{\alpha_1 = -5}$

$\alpha_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\alpha_2 = \dfrac{9 + 19}{2}$

$\boxed{\alpha_2 = 14}$

On en conclut que le couple $(x ; y)$ est associé au couple de solution (-5 ; 14).