Introduction – La Fonction Exponentielle

Notion d'équation différentielle

Définition : on appelle "*équation différentielle linéaire d'ordre 1*" une équation où intervient une fonction f , sa dérivée f' et la variable x

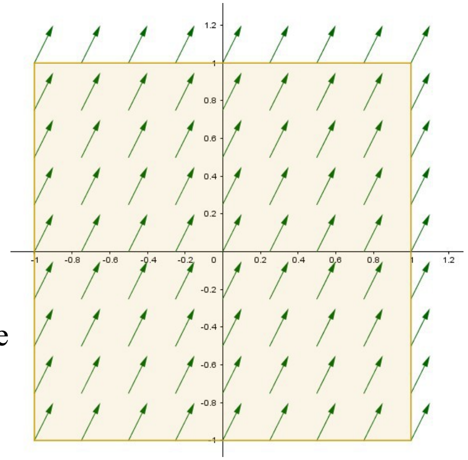
Exemples : $(E_0): f'(x)=0$; $(E_1): f'(x)=2$; $(E_2): f'(x)=x$; $(E_3): f'(x)=f(x)$; $(E_4): f'(x)=2f(x)$; $(E_5): f'(x)=f(x)+1$

Déterminer les "*fonctions solutions*" de ces équations différentielles vérifiant une condition initiale : $A(x_A; y_A)\in C_f$

Analyse des équations différentielles

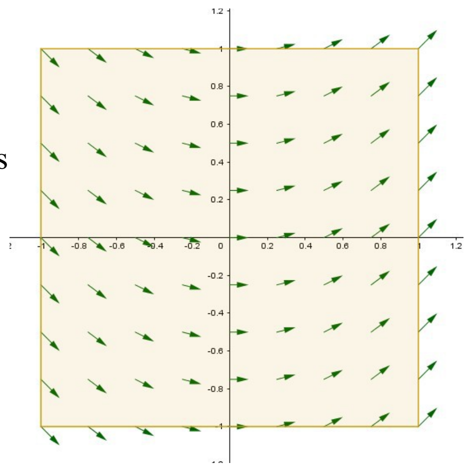
$(E_0): f'(x)=0$; on cherche une fonction f dont sa dérivée est nulle ; Ainsi toute fonction constante convient : $f(x)=k$

$(E_1): f'(x)=2$; on cherche une fonction f dont toutes ses dérivées valent 2 ainsi en chaque point de C_f il existe un vecteur-directeur du type $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en tout point $M(x;y)$ du plan ; on obtient un graphique "*champ de vecteurs*"

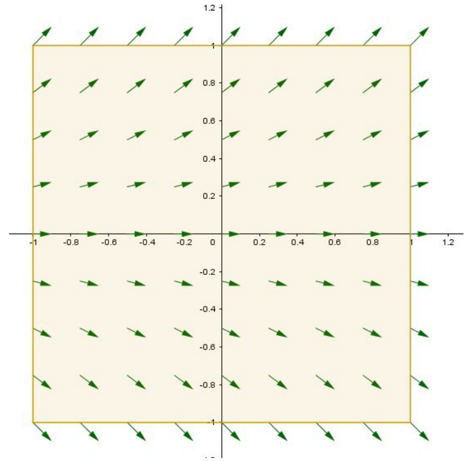


Ainsi, une fonction solution est du type $f(x)=2x+k$; si de plus on sait que $A(0;1)\in C_f$ alors la solution devient unique , soit $f(x)=2x+1$

$(E_2): f'(x)=x$; on cherche une fonction f définie par le champ de vecteurs formés à partir de $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$ en tout point $M(x;y)$ du plan ; une fonction solution est du type $f(x)=ax^2+k$; donc $f'(x)=2ax$ or $f'(x)=x$ alors $2a=1$ donc $a=0{,}5$ donc $f(x)=0{,}5x^2+k$; si de plus on sait que $A(0;1)\in C_f$ alors la fonction devient $f(x)=0{,}5x^2+1$



$(E_3): f'(x)=f(x)$; on cherche une fonction f définie par le champ de vecteurs formés à partir de $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}$ en tout point $M(x;y)$ du plan

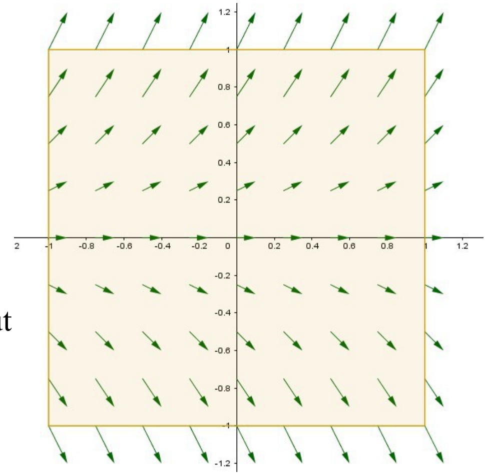


On observe qu'une fonction solution particulière est la fonction nulle : $f(x)=0$

Or on cherche une fonction solution f avec $A(0;1)\in C_f$; du fait de la symétrie axiale selon l'axe (Ox) on pose une nouvelle fonction du type : $f(x)=a^x$

il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de a ; en particulier $f(0)=a^0=1$ donc on doit avoir $f'(0)=1$ (la valeur de a sera approchée à 10^{-6} près)

$(E_4): f'(x)=2f(x)$; on cherche une fonction f définie par le champ de vecteurs formés à partir de $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2y\end{pmatrix}$ en tout point $M(x;y)$ du plan ; De la même façon que précédemment on cherche une fonction solution du type $f(x)=a^{2x}$



$(E_5): f'(x)=f(x)+1$; on cherche une fonction f définie par le champ de vecteurs formés à partir de $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\y+1\end{pmatrix}$ en tout point $M(x;y)$ du plan ; De la même façon que précédemment on cherche une fonction solution du type $f(x)=2a^x-1$

En effet, on observe une translation de la solution de l'équation (E_3) selon le vecteur $-\vec{j}$