Le second degré

On appelle trinôme du second degré la quantité :

$$ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0$$

Équation bicarrée

Une équation bicarrée est une équation de la forme :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

On pose alors $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$

L'équation devient : $aX^2 + bX + c = 0$

On résout en X.
On ne retient que les solutions positives.

On revient à x : $x = \pm\sqrt{X}$

Forme canonique du trinôme

Méthode : Pour déterminer la forme canonique :

- On met a en facteur.
- On considère les deux premiers termes comme le début d'un carré parfait.
- On ajoute puis on retranche le carré introduit.
- On réduit ensuite l'expression.

L'expression générale, **que l'on ne retient pas**, vaut :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Signe du trinôme

$\Delta > 0$. Le signe du trinôme est du signe de :

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		a	0	$-a$	0	a	

$\Delta = 0$. Le trinôme est nul si $x = x_0$ et du signe de a sinon.

$\Delta < 0$. Le trinôme est toujours du signe de a

Racines du trinôme

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé discriminant.

- $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$, le trinôme a une racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines

Fonction trinôme

Toute fonction trinôme f peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Selon le signe de a, on a les variations suivantes :

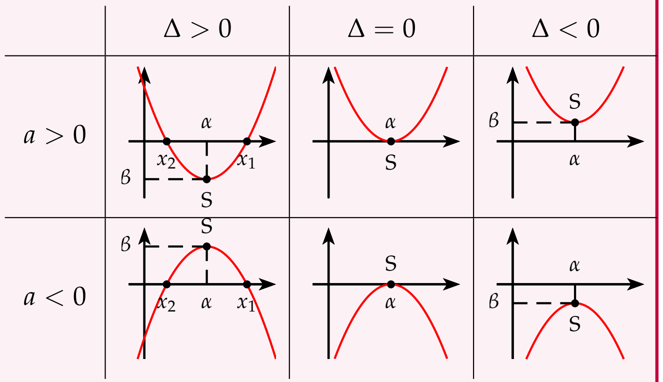
$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

Représentations



Système somme produit

Soit le système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$

Le système est symétrique donc :
si (x, y) est solution alors (y, x) l'est aussi.

x et y sont solutions de l'équation

$$X^2 - SX + P = 0$$

Factorisation. Somme et produit des racines

- $\Delta > 0$: x_1 et x_2 les deux racines.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

- $\Delta = 0$: x_0 la racine double :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Équation paramétrique

Paramètre : Quantité fixé, souvent noté m, par opposition à une inconnue, noté x, utilisée pour désigner les coefficients devant l'inconnue.

Soit l'équation paramétrique (E_m) : $(m-1)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$

Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation (E_m).

- $m = 1$ L'équation (E_1) est du premier degré : $-2x + 4 = 0$.

  (E_1) admet une solution simple $x = 2$
- $m \neq 1$ L'équation (E_m) est du second degré.

  $\Delta = 4m^2 - 4(m-1)(m+3) = 4(-2m+3)$

  Le signe de Δ est du signe de $(-2m+3)$.
- On remplit un tableau de signes en indiquant le nombre de solutions.

m	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Δ		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Nombre de solutions		2 sol. x_1 et x_2	1er deg. 1 sol.	2 sol. x_1 et x_2	x_0 sol. double	pas de solution	

Équation se ramenant au second degré

$$\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x-5} = \frac{9}{4} \qquad D_f = \mathbb{R} - \left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$$

$x \in D_f$ on multiplie par $4(x+2)(2x-5)$

$$4(2x-5) - 8(x+2) = 9(x+2)(2x-5)$$

$$8x - 20 - 8x - 16 = 18x^2 - 45x + 36x + 90$$

$$-18x^2 + 9x + 54 = 0 \overset{\div(-9)}{\Leftrightarrow} 2x^2 - x - 6 = 0$$

$\Delta = 1 + 48 = 49 = 7^2$ deux sol. distinctes

$$x_1 = \frac{1+7}{4} = 2 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{1-7}{4} = -\frac{3}{2} \in D_f$$

$$S = \left\{-\frac{3}{2}\,;\, 2\right\}$$

Inéquation rationnelle se ramenant au second degré

Soit l'inéquation : $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} \geqslant 0$

- Racine de $x^2 + x - 2 = 0$

  $x_1 = 1$ racine évidente $P = -2$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -2$

  L'ensemble de définition est $D_f = \{-2\,;\,1\}$
- Racine de $2x^2 + 5x + 3 = 0$

  $x_1 = -1$ racine évidente $P = \dfrac{3}{2}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -\dfrac{3}{2}$
- On remplit un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

- $S =]-\infty\,;-2[\cup \left[-\dfrac{3}{2}\,;-1\right] \cup]1\,;+\infty[$

Équation bicarrée et système somme-produit

- Soit l'équation : $x^4 - 5x - 36 = 0$ On pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$.

  L'équation devient : $X^2 - 5X - 36 = 0$ on a : $\Delta = 25 + 144 = 169 = 13^2$

  Deux sol. $X_1 = \dfrac{5+13}{2} = 9$ ou $X_2 = \dfrac{5-13}{2} = -4 < 0$

  On ne retient que $X_1 \geqslant 0$, deux solutions pour x : $x_1 = 3$ ou $x_2 = -3$
- Soit le système $\begin{cases} x + y = 18 \\ xy = 65 \end{cases}$

  x et y sont solutions de $X^2 - 18X + 65 = 0$. On a $\Delta = 64 = 8^2$

  $X_1 = \dfrac{18+8}{2} = 13$ ou $X_2 = \dfrac{18-8}{2} = 5$ donc $S = \{(13,5)\,;\,(5,13)\}$