Correction 1

a. $(5x+1)(1-2x)-2(3x-1)$

$=5x-10x^2+1-2x-6x+2=-10x^2-3x+3$

b. $(x+2)(2x-1)-(3-x)(5x-1)$

$=(2x^2-x+4x-2)-(15x-3-5x^2+x)$

$=(2x^2+3x-2)-(-5x^2+16x-3)$

$=72x^2+3x-2+5x^2-16x+3=7x^2-13x+1$

c. $(3x+2)(5x+1)-(5x-1)$

$=15x^2+3x+10x+2-5x+1=15x^2+8x+3$

Correction 2

a. Pour $x=2$, on a :

- $3x+1=3\times2+1=6+1=7$
- $4x=4\times2=8$

b. Pour $x=1$, on a :

- $(x+1)^2=(1+1)^2=2^2=4$
- $x^2+1=1^2+1=1+1=2$

c. Prenons $x=1$ et $y=1$:

- $(x+y)^2=(1+1)^2=2^2=4$
- $x^2+y^2=1^2+1^2=1+1=2$

d. Pour $x=1$ et $y=1$, on a :

- $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}=1+1=2$
- $\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

e. Pour $x=1$ et $y=1$, on a :

- $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$
- $x+y=1+1=2$

Correction 3

1. Les nombres dont le carré valent 4 sont 2 et -2. Ainsi, l'équation $x^2=4$ admet pour solutions les deux nombres -2 et 2.

2. a. L'équation $x^2=0$ admet une unique solution : 0.

b. L'équation $x^2=-1$ n'admet aucune solution car un carré ne peut pas être négatif.

c. $(x+1)^2=0$

Le carré d'un nombre est nul si, et seulement si, ce nombre est nul :

$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Cette équation admet une unique solution -1.

d. Résolvons l'équation : $(x-1)^2=4$

Si le carré d'un nombre vaut 4 alors ce nombre vaut -2 ou 2.

On en déduit les deux équations suivantes :

$x-1=-2$	$x-1=2$
$x=-2+1$	$x=2+1$
$x=-1$	$x=3$

Ainsi, cette équation admet deux solutions : -1 et 3.

Correction 4

a. $$(3x+1)(2-3x)-(5x-1)(3x+1)=0$$
$$(3x+1)\big[(2-3x)-(5x-1)\big]=0$$
$$(3x+1)(2-3x-5x+1)=0$$
$$(3x+1)(3-8x)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

Les solutions de cette équation sont :

$3x+1=0$	$3-8x=0$
$3x=-1$	$-8x=-3$
$x=-\dfrac{1}{3}$	$x=\dfrac{-3}{-8}$
	$x=\dfrac{3}{8}$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{3}{8}\right\}$

b. $$2(x+2)(3-x)=(x+2)(5x-7)$$
$$2(x+2)(3-x)-(x+2)(5x-7)=0$$
$$(x+2)\big[2(3-x)-(5x-7)\big]=0$$
$$(x+2)(6-2x-5x+7)=0$$
$$(x+2)(13-7x)=0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$x+2=0$	$13-7x=0$
$x=-2$	$-7x=-13$
	$x=\dfrac{-13}{-7}$
	$x=\dfrac{13}{7}$

L'ensemble des solutions de cette équation est :

$\mathcal{S}=\left\{-2\,;\dfrac{13}{7}\right\}$

c. $$(2x+3)(6x+7)+(2-4x)(3x+1)=3x-7$$
$$12x^2+14x+18x+21+6x+2-12x^2-4x=3x-7$$
$$34x+23=3x-7$$
$$31x=-30$$
$$x=-\dfrac{30}{31}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{30}{31}\right\}$

d. $$-(12x-2)(2-3x)=36x^2-12x+1$$
$$-2(6x-1)(2-3x)-(6x-1)^2=0$$
$$(6x-1)\big[-2(2-3x)-(6x-1)\big]=0$$
$$(6x-1)(-4+6x-6x+1)=0$$
$$(6x-1)(-3)=0$$
$$-3(6x-1)=0$$
$$x=\dfrac{1}{6}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{6}\right\}$

Correction 5

a. $(5x+6)^2=(5x)^2+2\times5x\times6+6^2=25x^2+60x+36$

b. $(2x-6)(2x+6)=(2x)^2-6^2=4x^2-36$

c. $(8-4x)^2 = 8^2 - 2\times8\times4x + (4x)^2 = 64 - 64x + 16x^2$

d. $(2x+1)(2x+1) = (2x+1)^2 = (2x)^2 + 2\times2x\times1 + 1^2$
$= 4x^2 + 4x + 1$

e. $(1-x)(1+x) = 1^2 - x^2 = 1 - x^2$

f. $(2-x)^2 = 2^2 - 2\times2\times x + x^2 = 4 - 4x + x^2$

Correction 6

Remarquons d'abord que pour tout x positif, les nombres $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{x+1}{x+2}$ sont positif.

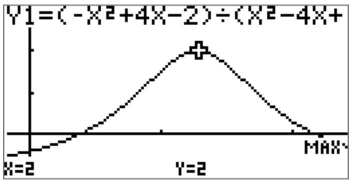
Aucun des critères communs sur les fractions ne permettent ici d'aboutir à une conclusion, passons par l'étude de la différence de ces deux fractions :

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)(x+2)} - \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x+1)}$$
$$= \frac{x(x+2)-(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+2x-(x^2+2x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{-1}{(x+1)(x+2)} < 0$$

On obtient la comparaison : $\dfrac{x}{x+1} < \dfrac{x+1}{x+2}$

Correction 7

1. Voici la présentation du maximum de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



La fonction f admet un maximum valant 2.

2. a. On a les égalités suivantes :

$$\frac{3}{1+(x-2)^2} - 1 = \frac{3}{1+x^2-4x+4} - 1 = \frac{3}{x^2-4x+5} - 1$$
$$= \frac{3}{x^2-4x+5} - \frac{x^2-4x+5}{x^2-4x+5} = \frac{3-(x^2-4x+5)}{x^2-4x+5}$$
$$= \frac{3-x^2+4x-5}{x^2-4x+5} = \frac{-x^2+4x-2}{x^2-4x+5} = f(x)$$

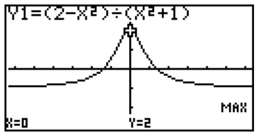
b. Le carrée d'un nombre étant positif, on en déduit :
$$(x-2)^2 > 0$$
$$1+(x-2)^2 > 1$$
De deux fractions ayant le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur :
$$\frac{3}{1+(x-2)^2} < \frac{3}{1}$$

c. De l'inégalité précdente, on en déduit :
$$\frac{3}{1+(x-2)^2} \leqslant 3$$
$$\frac{3}{1+(x-2)^2} - 1 \leqslant 3 - 1$$
$$f(x) \leqslant 2$$
On vient de montrer que la fonction f ne peut avoir de valeurs supérieures à 2. Or, on a :
$$f(2) = \frac{3}{1+(2-2)^2} - 1 = \frac{3}{1} - 1 = 2$$

La fonction f admet pour maximum 2 pour $x=2$.

Correction 8

1. A l'aide de la calculatrice, on obtient le maximum :



La valeur maximale vaut 2 et elle est atteinte pour $x=0$.

2. a. On a les transformations algébriques :
$$\frac{3}{x^2+1} - 1 = \frac{3}{x^2+1} - \frac{x^2+1}{x^2+1} = \frac{3-\left(x^2+1\right)}{x^2+1}$$
$$= \frac{3-x^2-1}{x^2+1} = \frac{2-x^2}{x^2+1} = f(x)$$

b. On a les comparaisons successives :
$$x^2 \geqslant 0$$
$$x^2+1 \geqslant 1$$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$\frac{1}{x^2+1} \leqslant 1$$
$$\frac{3}{x^2+1} \leqslant 3$$

c. De l'inégalité précédente, on obtient :
$$\frac{3}{x^2+1} \leqslant 3$$
$$\frac{3}{x^2+1} - 1 \leqslant 3 - 1$$
D'après la question 2. a. :
$$f(x) \leqslant 2$$
Ainsi, 2 est un majorant de la fonction f. De plus :
$$f(0) = \frac{2-0^2}{0^2+1} = \frac{2}{1} = 2$$

