$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^k.b^{n-k}=(a+b)^n$$

D'après la "formule du binôme de NEWTON"

donc avec $a=1$ et $b=1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1^k.1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$$

interprétation : la somme d'une ligne de rang n du triangle de PASCAL est égale à 2^n

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

de même avec $a=-1$ et $b=1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^n.\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.(-1)^k.1^{n-k}=(-1+1)^n=0$$

interprétation : la somme alternée d'une ligne de rang n du triangle de PASCAL est égale à 0

pour les autres sommes il faut maintenant être plus subtil ...

on observe que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

(termes de rangs pairs + trmes de rangs impairs)

aussi on a pour les lignes de rang n impair : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-2k}$

(symétrie des termes)

or puisque le nombre de valeurs est pair on a aussi :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ soit $\displaystyle 2.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=2^n$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=2^{n-1}$

par ailleurs , on sait que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

donc $\displaystyle 2^{n-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}=2^n$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}(2-1)=2^{n-1}$

enfin pour la dernière somme, on utilise la "formule de PASCAL" :

$\displaystyle\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ *(voir le tableau précédent)*

donc en modifiant les paramètres : $\displaystyle\binom{k}{p}+\binom{k}{p+1}=\binom{k+1}{p+1}$

ainsi : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{p}{p}+\sum_{k=p+1}^{n}\binom{k}{p}=1+\sum_{k=p+1}^{n}\left[\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right]$

donc

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=1+\left[\binom{p+2}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}\right]+\left[\binom{p+3}{p+1}-\binom{p+2}{p+1}\right]+\dots+\left[\binom{n+1}{p+1}-\binom{n}{p+1}\right]$$

on appelle cela une "somme téléscopique" donc après les simplifications simultanées :

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=1+\left[\binom{n+1}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}\right]=1+\binom{n+1}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}=1+\binom{n+1}{p+1}-1=\binom{n+1}{p+1}$$

comme petit BONUS, je ne résiste pas à vous donner la très célèbre

"formule du PION" :

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$