Ex 1 : Études des suites explicites

a) $u_n=2n^2+3n+5$

Sens de variation : $u_{n+1}-u_n=(2(n+1)^2+3(n+1)+5)-(2n^2+3n+5)$

$=(2n^2+4n+2+3n+8)-(2n^2+3n+5)=4n+5$

$n\geqslant 0$ donc $4n+5>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$

donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Convergence & Limite : $\lim_{n\to+\infty}(2n^2)=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(3n)=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(5)=5$

donc par somme $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$ et la suite (u_n) est divergente

b) $v_n=4n-n^2$

Sens de variation : $v_{n+1}-v_n=(4(n+1)-(n+1)^2)-(4n-n^2)$

$=(4n+4-n^2-2n-1)-(4n-n^2)=-2n+3$

$-2n+3\leqslant 0$ si $n\geqslant 1{,}5$ donc $v_{n+1}-v_n<0$ dès que $n\geqslant 2$

donc (v_n) est décroissante pour $n\geqslant 2$

Convergence & Limite : $v_n=4n-n^2=n^2\left(\frac{4n}{n^2}-\frac{n^2}{n^2}\right)=n^2\left(\frac{4}{n}-1\right)$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}-1\right)=-1$, $\lim_{n\to+\infty}(n^2)=+\infty$

donc par produit $\lim_{n\to+\infty}(v_n)=-\infty$ et la suite (v_n) est divergente

c) $w_n=1-\frac{2}{n+4}$

Sens de variation : $w_{n+1}-w_n=\left(1-\frac{2}{n+5}\right)-\left(1-\frac{2}{n+4}\right)=\frac{2}{n+4}-\frac{2}{n+5}$

$=\frac{2(n+5)-2(n+4)}{(n+4)(n+5)}=\frac{2n+10-2n-8}{(n+4)(n+5)}=\frac{2}{(n+4)(n+5)}$

$n\geqslant 0$ donc $n+5>0$ et $n+4>0$ donc $w_{n+1}-w_n>0$

donc (w_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Convergence & Limite : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{n+4}\right)=0$, $\lim_{n\to+\infty}(1)=1$

donc par somme $\lim_{n\to+\infty}(w_n)=1$ et la suite (w_n) est convergente vers 1

d) $t_n=\frac{4n-1}{2n+3}$

Sens de variation : $t_{n+1}-t_n=\left(\frac{4(n+1)-1}{2(n+1)+3}\right)-\left(\frac{4n-1}{2n+3}\right)$

$=\left(\frac{4n+3}{2n+5}\right)-\left(\frac{4n-1}{2n+3}\right)=\frac{(4n+3)(2n+3)-(2n+5)(4n-1)}{(2n+5)(2n+3)}$

$=\frac{8n^2+18n+9-8n^2-18n+5}{(2n+5)(2n+3)}=\frac{14}{(2n+5)(2n+3)}$

$n\geqslant 0$ donc $2n+5>0$ et $2n+3>0$ donc $t_{n+1}-t_n>0$

donc (t_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Convergence & Limite : $t_n=\frac{4n-1}{2n+3}=\frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\frac{4-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)=0$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}\right)=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(4-\frac{1}{n}\right)=4$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)=2$

donc par quotient $\lim_{n\to+\infty}(t_n)=2$ et la suite (t_n) est convergente vers 2

Ex 2 : Études des suites récurrentes

a) $u_{n+1}=\frac{u_n^2+2u_n}{4}\,;u_0=1$

Sens de variation :

$u_{n+1}-u_n=0{,}25(u_n^2+2u_n)-u_n=0{,}25u_n^2+0{,}5u_n-u_n=0{,}25u_n^2-0{,}5u_n$

on pose la fonction g définie par $g(x)=0{,}25x^2-0{,}5x$

on cherche les racines de g : $x=0$ et $x=2$

on dresse le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

on observe la position des termes de la suites dans ce tableau de signes

on a : $0<u_n\leqslant 1$ d’après la table de valeurs

donc $u_n\in[0\,;2]$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

donc (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 0$

Convergence & Limite :
on observe le tracé en escalier de la suite (u_n)
on conjecture que (u_n) est convergente vers 0

en effet, (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente
sa limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=0,25\,L^2+0,5\,L$
donc $L=0$ ou $L=2$; or puisque (u_n) est décroissante $L<u_0$ donc $L<1$ donc $L=0$
ainsi la suite (u_n) est bien convergente vers 0

b) $v_{n+1}=2\sqrt{v_n+3}\,;v_0=-1$

Sens de variation : $v_{n+1}-v_n=2\sqrt{v_n+3}-v_n=\frac{(2\sqrt{v_n+3}-v_n)(2\sqrt{v_n+3}+v_n)}{2\sqrt{v_n+3}+v_n}$

$$=\frac{(2\sqrt{v_n+3})^2-v_n^2}{2\sqrt{v_n+3}+v_n}=\frac{4(v_n+3)-v_n^2}{2\sqrt{v_n+3}+v_n}=\frac{-v_n^2+4\,v_n+12}{2\sqrt{v_n+3}+v_n}$$

on pose la fonction g définie par $g(x)=-x^2+4\,x+12$
on cherche les racines de g : $x=-2$ et $x=6$

on dresse le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

on observe la position des termes de la suites dans ce tableau de signes
on a : $-1\leqslant v_n\leqslant 6$ d'après la table de valeurs
donc $v_n\in[-2\,;6]$ donc $v_{n+1}-v_n>0$

donc (v_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Convergence & Limite :
on observe le tracé en escalier de la suite (v_n)
on conjecture que (v_n) est convergente vers 6

en effet, (v_n) est croissante et majorée donc elle est convergente
sa limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=2\sqrt{L+3}$
donc $L=6$ puisque L est nécessairement positive ici

ainsi la suite (v_n) est bien convergente vers 6

c) $r_{n+1}=\frac{1}{r_n+1}\,;r_0=1$

Sens de variation : $r_{n+1}-r_n=\frac{1}{r_n+1}-r_n=\frac{1-r_n(1+r_n)}{1+r_n}=\frac{-r_n^2-r_n+1}{1+r_n}$

on pose la fonction g définie par $g(x)=-x^2-x+1$
on cherche les racines de g : $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=-\phi$ et $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-\overline{\phi}$

on dresse le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\phi$		$-\overline{\phi}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

on observe la position des termes de la suites dans ce tableau de signes
on a : $0,5\leqslant r_n\leqslant 1$ d'après la table de valeurs
donc les valeurs de la suite (r_n) alternent entre $[-\phi\,;-\overline{\phi}]$ et $[-\overline{\phi}\,;+\infty[$
donc $r_{n+1}-r_n$ ne possède aucun signe constant

donc (r_n) est non monotone

Convergence & Limite :
on observe le tracé en escalier de la suite (u_n)
on conjecture que (r_n) est convergente vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=-\overline{\phi}$
La preuve de cette convergence *n'est pas au programme de 1ère spécialité*

d) $w_{n+1}=\frac{w_n}{2}+\sqrt{w_n}\,;w_0=0,2$

Sens de variation : $w_{n+1}-w_n=0,5\,w_n+\sqrt{w_n}-w_n=\sqrt{w_n}-0,5\,w_n$

on pose la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{x}-0,5\,x$
on cherche les racines de g : $x=0$ et $x=4$

on dresse le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$:

x	0		4		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

on observe la position des termes de la suites dans ce tableau de signes
on a : $0<w_n\leqslant 4$ d'après la table de valeurs donc $w_n\in[0\,;4]$
donc $w_{n+1}-w_n>0$ donc (w_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Convergence & Limite :

on observe le tracé en escalier de la suite (w_n)

on conjecture que (w_n) est convergente vers 4

en effet, (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente

sa limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=0{,}5L+\sqrt{L}$

donc $L=0$ ou $L=4$; or puisque (w_n) est croissante $L>u_0$ donc $L<0{,}2$ donc $L=4$

ainsi la suite (w_n) est bien convergente vers 4

e) $t_{n+1}=\frac{t_n^2+2}{3}\,;t_0=\frac{1}{2}$

Sens de variation : $t_{n+1}-t_n=\frac{t_n^2+2}{3}-t_n=\frac{t_n^2-3t_n+2}{3}$

on pose la fonction g définie par $g(x)=x^2-3x+2$

on cherche les racines de g : $x=1$ et $x=2$

on dresse le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

on observe la position des termes de la suites dans ce tableau de signes

on a : $0{,}5\leqslant t_n\leqslant 1$ d'après la table de valeurs

donc $u_n\in]-\infty;1]$ donc $t_{n+1}-t_n>0$

donc (t_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Convergence & Limite :

on observe le tracé en escalier de la suite (u_n)

on conjecture que (t_n) est convergente vers 1

en effet, (t_n) est croissante et majorée donc elle est convergente

sa limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=\frac{L^2+2}{3}$

donc $L=1$ ou $L=2$; or puisque (t_n) est croissante $L>u_0$

donc $L>0{,}5$ de plus (t_n) est majorée par 1 donc $L\leqslant 1$ donc $L=1$

ainsi la suite (t_n) est bien convergente vers 1

f) $k_{n+1}=1+\frac{1}{k_n}\,;k_0=1$

Sens de variation : $k_{n+1}-k_n=1+\frac{1}{k_n}-k_n=\frac{-k_n^2+k_n+1}{k_n}$

on pose la fonction g définie par $g(x)=-x^2+x+1$

on cherche les racines de g : $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ et $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\overline{\phi}$

on dresse le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\overline{\phi}$		ϕ		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

on observe la position des termes de la suites dans ce tableau de signes

on a d'après la table de valeurs $1\leqslant k_{2n}\leqslant\phi$ et $k_{2n+1}\geqslant\phi$

donc $k_{n+1}-k_n$ possède un signe alterné

donc (k_n) est non monotone

Convergence & Limite :

on observe le tracé en escalier de la suite (k_n)

on conjecture que (k_n) est convergente vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$

en effet, (k_n) est non monotone, minorée par 0 et majorée par 1

sa limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=1+\frac{1}{L}$

donc $L=\overline{\phi}$ ou $L=\phi$; puisque (k_n) est alternée autour de ϕ

on déduit que $L=\phi$

ainsi la suite (k_n) est bien convergente vers ϕ

Remarque : une démonstration beaucoup plus « affinée » sera effectuée en section Tale spécialité mathématiques