Les Suites explicites

a) $u_n=2n^2-n+1$

Sens de variation :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=(2(n+1)^2-(n+1)+1)-(2n^2-n+1)\\&=(2n^2+4n+2-n-1+1)-(2n^2-n+1)\\&=4n+1\end{aligned}$$

or pour $n\geqslant 0$, $4n+1>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$

donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Limite & Convergence :

$u_n=n^2(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})$ avec $\lim_{n\to+\infty}(\frac{-1}{n})=0$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^2})=0$, $\lim_{n\to+\infty}(2)=2$

donc $\lim_{n\to+\infty}(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})=2$ or $\lim_{n\to+\infty}(n)=+\infty$ par produit $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$

ainsi la suite (u_n) est divergente

b) $u_n=\frac{n+2}{n-1}$

Sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=(\frac{n+3}{n})-(\frac{n+2}{n-1})=\frac{(n+3)(n-1)-n(n+2)}{n(n-1)}=\frac{n^2+2n-3-n^2-2n}{n(n-1)}$$

donc $u_{n+1}-u_n=\frac{-3}{n(n-1)}$

si $n\geqslant 2$ alors $n>0$ et $n-1>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$
ainsi (u_n) est décroissante pour $n\geqslant 2$

Limite & Convergence :

$u_n=\frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(1-\frac{1}{n})}=\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}}$ or $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{n})=1$, $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})=1$

par quotient $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=1$

ainsi la suite (u_n) est convergente vers 1

c) $u_n=2-\frac{4}{2n-4}$

Sens de variation :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=(2-\frac{4}{2n+2-4})-(2-\frac{4}{2n-4})=\frac{-4}{2n-2}+\frac{4}{2n-4}\\&=\frac{-4(2n-4)+4(2n-2)}{(2n-2)(2n-4)}=\frac{8}{(2n-2)(2n-4)}\end{aligned}$$

or pour $n\geqslant 3$, $2n-2>0$ et $2n-4>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$
donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 3$

Limite & Convergence :

$\lim_{n\to+\infty}(2)=2$, $\lim_{n\to+\infty}(\frac{4}{2n-4})=0$ par différence $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=2$

ainsi la suite (u_n) est convergente vers 2

d) $u_n=\sqrt{2n+1}$

Sens de variation :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}=\frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}\\&=\frac{(\sqrt{2n+3})^2-(\sqrt{2n+1})^2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}=\frac{2n+3-2n-1}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}=\frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}\end{aligned}$$

or pour $n\geqslant 0$, $\sqrt{2n+3}>0$, $\sqrt{2n+1}>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$
donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Limite & Convergence :

$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2n+1})=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n)=+\infty$

ainsi la suite (u_n) est divergente

Les Suites récurrentes

a) $\begin{cases} u_{n+1}=-u_n^2+u_n+1 \\ u_0=0{,}5 \end{cases}$

Sens de variation :

$u_{n+1}-u_n=-u_n^2+u_n+1-u_n=1-u_n^2$

on pose $g(x)=1-x^2=(1-x)(1+x)$ et on étudie son signe

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Avec la table de valeurs de la suite (u_n) on observe que

$u_0, u_2, u_4, \ldots \in [-1\,;1]$ et $u_1, u_3, u_5, \ldots \in [1\,;+\infty[$

donc le signe de $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constant

donc la suite (u_n) est non monotone

Limite & Convergence :

la suite (u_n) est convergente (résultat admis)

sa limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=-L^2+L+1$

donc $1-L^2=0$ donc $L^2=1$ donc $L=-1$ ou $L=1$

or on sait que $0<u_n<2$ donc $L=1$

ainsi la suite (u_n) est convergente vers 1

b) $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{u_n+2}{u_n+1} \\ u_0=1 \end{cases}$ Sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2}{u_n+1}-u_n=\frac{u_n+2-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+2}{u_n+1}$$

on pose $g(x)=-x^2+2$ et on étudie son signe

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Avec la table de valeurs de la suite (u_n) on observe que

$u_0, u_2, u_4, \ldots \in [-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}]$ et $u_1, u_3, u_5, \ldots \in [\sqrt{2}\,;+\infty[$

donc le signe de $u_{n+1}-u_n$ n'est pas constant

donc la suite (u_n) est non monotone

Limite & Convergence :

la suite (u_n) est convergente (résultat admis)

sa limite L vérifie le théorème du point fixe donc $L=\dfrac{L+2}{L+1}$

donc $L(L+1)=L+2$ donc $L^2=2$ donc $L=-\sqrt{2}$ ou $L=\sqrt{2}$

or on sait que $1\leqslant u_n<\sqrt{2}$ donc $L=\sqrt{2}$

c) $\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+1} \\ u_0=0 \end{cases}$ sens de variation :

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n^2+1}-u_n=\frac{(\sqrt{u_n^2+1}-u_n)(\sqrt{u_n^2+1}+u_n)}{\sqrt{u_n^2+1}+u_n}=\frac{u_n^2+1-u_n^2}{\sqrt{u_n^2+1}+u_n}=\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}+u_n}$$

ainsi il est évident que $u_{n+1}-u_n>0$

donc (u_n) est croissante pour $n\geqslant 0$

Limite & Convergence :

la suite (u_n) est croissante et non majorée

donc (u_n) n'est pas convergente

en fait on démontre (résultat admis) que (u_n) est divergente vers $+\infty$

on peut en effet vérifier que le théorème du point fixe n'admet aucune solution

si $L=\sqrt{L^2+1}$ alors $L^2=L^2+1$

ce qui est bien sûr impossible !