1ère B **TD 3 – La Dérivation – *Correction*** **janv 2022**

Ex 1 :

$f(x)=2x^3-3x^2-1$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=6x^2-6x=(6x)(x-1)$

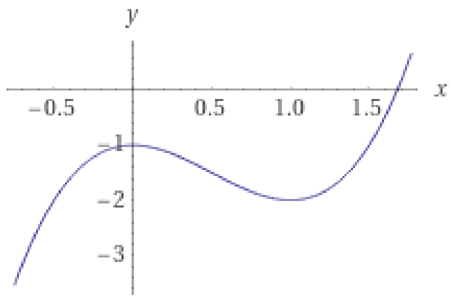
$f'(x)=0$ donne $6x=0$ ou $x-1=0$ soit $x=0$ ou $x=1$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f			-1				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-2	↗	



(x from −0.7 to 1.8)

$f(x)=4x+3+\dfrac{9}{x-2}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$f'(x)=4-\dfrac{9}{(x-2)^2}=\dfrac{4(x-2)^2-9}{(x-2)^2}=\dfrac{(2(x-2))^2-3^2}{(x-2)^2}$

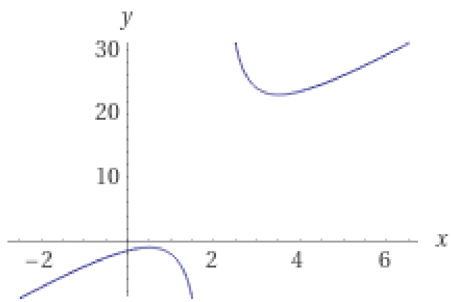
$=\dfrac{(2(x-2)-3)(2(x-2)+3)}{(x-2)^2}=\dfrac{(2x-7)(2x-1)}{(x-2)^2}$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		$1{,}5$		2		$3{,}5$		$+\infty$
$2x-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$1{,}5$		2		$3{,}5$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f			-9		$\Vert$ $+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ $\Vert$	↘	23	↗	



(x from −2.6 to 6.6)

$f(x)=\dfrac{-4x}{x^2+1}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{-4(x^2+1)-(-4x)(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-4x^2-4+8x^2}{(x^2+1)^2}$

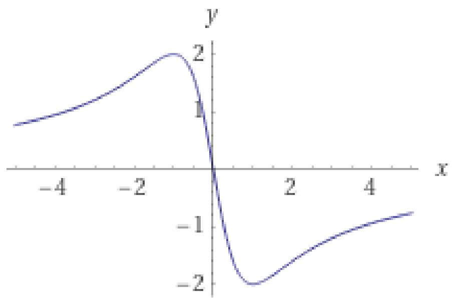
$=\dfrac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	2	↘		↗	0
	0				-2		



(x from −5 to 5)

$f(x)=x^4-2x^2-1$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-4x=(4x)(x^2-1)=(4x)(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$ donne $4x=0$ ou $x-1=0$ ou $x+1=0$

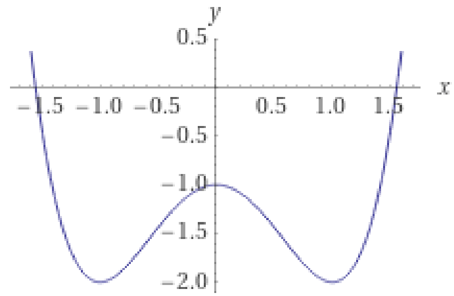
soit $x=0$ ou $x=1$ ou $x=-1$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘		↗	-1	↘		↗	$+\infty$
			-2				-2		



(x from −1.7 to 1.7)

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+1$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-6x^2+2x=(2x)(2x^2-3x+1)=(2x)(x-1)(2x-1)$

$f'(x)=0$ donne $2x=0$ ou $x-1=0$ ou $2x-1=0$

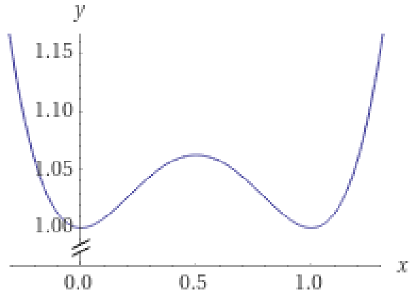
soit $x=0$ ou $x=1$ ou $x=0{,}5$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		0		$0{,}5$		1		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$0{,}5$		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘		↗	$1{,}0625$	↘		↗	$+\infty$
			1				1		



(x from −0.3 to 1.3)

$f(x)=\dfrac{x^2+2x+6}{x-1}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-1)-(x^2+2x+6)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2-x^2-2x-6}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$$

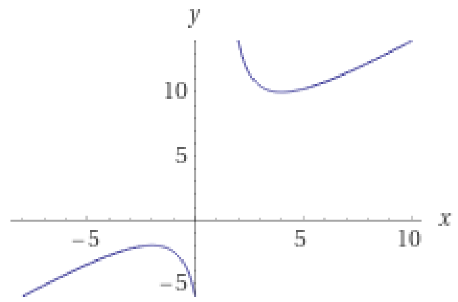
$f'(x)=0$ donne $x-4=0$ ou $x+2=0$ soit $x=-2$ ou $x=4$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$x-4$		–		–		–	0	+	
$x+2$		–	0	+		+		+	
$(x-1)^2$		+		+	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	–	‖	–	0	+	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
signe de f'		+	0	–	‖	–	0	+	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	10	↗	$+\infty$



(x from −8.2 to 10.2)

$f(x)=2x+1-\dfrac{2}{x-2}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

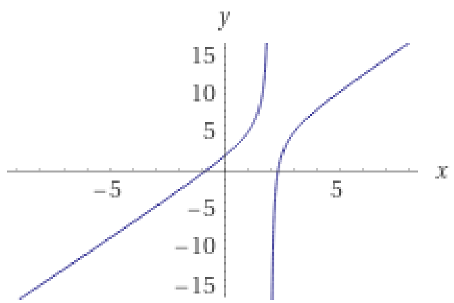
$$f'(x)=2+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{2(x-2)^2+2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x+10}{(x-2)^2}$$

le trinôme $2x^2-8x+10$ possède un discriminant négatif

donc $2x^2-8x+10>0$ or $(x-2)^2>0$ donc $f'(x)>0$;

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de f'		+	‖	+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



(x from −9.1 to 8.2)

$f(x)=-x^3+3x^2-4$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

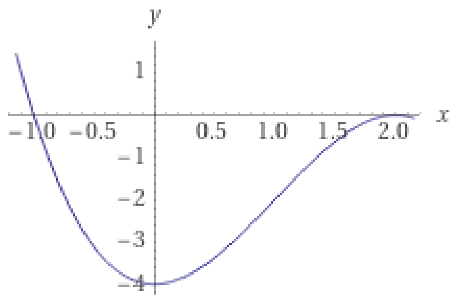
$f'(x)=-3x^2+6x=(3x)(-x+2)$
$f'(x)=0$ donne $3x=0$ ou $-x+2=0$ soit $t\,x=0$ ou $x=2$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$



(x from −1.1 to 2.1)

$f(x)=-x^4-x^2+4$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=-4x^3-2x=(-2x)(2x^2+1)$

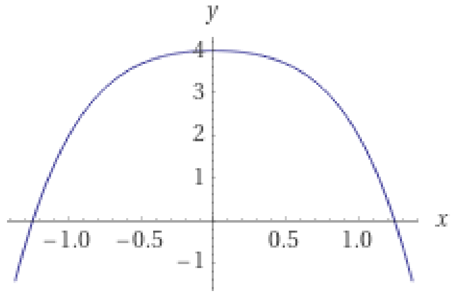
$f'(x)=0$ donne $-2x=0$ ou $2x^2+1=0$ soit $x=0$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		0				$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x^2+1$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$



(x from −1.4 to 1.4)

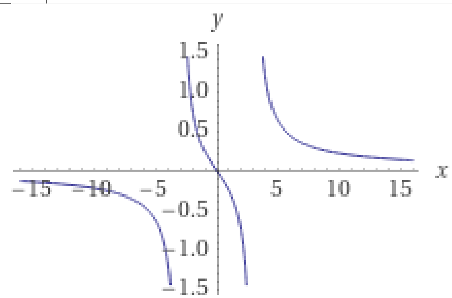
$f(x)=\frac{2x}{x^2-9}$; f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-3;3\}$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-9)-(2x)(2x)}{(x^2-9)^2}=\frac{2x^2-18-4x^2}{(x^2-9)^2}=\frac{-2x^2-18}{(x^2-9)^2}=\frac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2}$$

il est évident que $-2<0, x^2+9>0$ et $(x^2-9)^2>0$ donc $f'(x)<0$

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
signe de f'		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0



(x from −15.9 to 15.9)

Ex 2 : (***) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
Déterminer les valeurs de a,b,c,d sachant que $f(0)=3$, $f'(0)=-6$, $f(1)=1$ et $f(2)=-1$ puis étudier globalement la fonction

Partie A : Recherche de l'expression de f

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$f(0)=3$ donc on déduit que $d=3$

$f(1)=1$ donc on déduit que $a+b+c+d=1$ donc $a+b+c=-2$

$f(2)=-1$ donc on déduit que $8a+4b+2c+d=-1$ donc $4a+2b+c=-2$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=-6$ donc on déduit que $c=-6$

$a+b+c=-2$ donc on obtient $a+b=4$ (*)

$4a+2b+c=-2$ donc on obtient $2a+b=2$ (**)

on déduit des relations (*) et (**) que : $a=-2$

d'où on obtient $b=6$

finalement : $f(x)=-2x^3+6x^2-6x+3$

Partie B : Étude de la fonction f

$f'(x)=-6x^2+12x-6=(-6)(x^2-2x+1)=(-6)(x-1)^2$

le tableau de signes de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
-6		$-$		$-$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$