Exercice 1

Dans chacun des cas, étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$
2. $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. $u_n = \dfrac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
6. $u_n = \dfrac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
7. $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$
8. $u_n = \dfrac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

---

1. $u_n = n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - n^2 \\ &= n^2 + 2n + 1 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Or $n \in \mathbb{N}$ donc $2n + 1 > 0$.
Par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

2. $u_n = 3n - 5$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 5 - (3n - 5) \\ &= 3n + 3 - 5 - 3n - 5 \\ &= 3 \\ &> 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

4. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

5. $u_n = \dfrac{-2}{n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} n < n+1 &\Leftrightarrow n + 4 < (n+1) + 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n+4} > \frac{1}{(n+1)+4} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{n+4} < \frac{-2}{(n+1)+4} \\ &\Leftrightarrow u_n < u_{n+1} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

6. $u_n = \dfrac{5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5^{n+1}}{n+1} - \frac{5^n}{n} \\ &= 5^n \times \frac{5}{n+1} - \frac{5^n}{n} \\ &= 5^n \left(\frac{5}{n+1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 5^n \times \frac{5n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= 5^n \times \frac{4n - 1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $5^n > 0$ et $4n - 1 > 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

7. $u_n = 2n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 - 1 - (2n^2 - 1) \\ &= 2\left(n^2 + 2n + 1\right) - 1 - 2n^2 + 1 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 1 - 2n^2 + 1 \\ &= 4n + 2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

8. $u_n = \dfrac{3^n}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n} \\ &= 3^n \times \frac{3}{2(n+1)} - \frac{3^n}{2n} \\ &= 3^n \left(\frac{3}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} \right) \\ &= 3^n \times \frac{3n-(n+1)}{2n(n+1)} \\ &= 3^n \times \frac{2n-1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $3^n > 0$ et $2n-1 > 0$.
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etudier le sens de variations de la suite (u_n).

2. Montrer que $\forall n \geqslant 1, u_n \leqslant 1$.

1. $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n^2}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} \\ &= \frac{n^2-(n+1)^2}{2n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{n^2-(n^2+2n+1)}{2n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

2.

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{n^2+1}{2n^2} - 1 \\ &= \frac{n^2+1}{2n^2} - \frac{2n^2}{2n^2} \\ &= \frac{1-n^2}{2n^2} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ on a $1-n^2 \leqslant 0$.
Par conséquent $u_n \leqslant 1$.

Exercice 3

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = (-1)^n \qquad v_n = \frac{2-n}{2+n} \qquad w_n = n^2+2n-1$$

On veut déterminer le sens de variation de chacune de ces suites.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n puis en déduire le sens de variation de la suite (v_n).

3. Exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de n puis en déduire le sens de variation de la suite (w_n).

1. $u_0 = (-1)^0 = 1$, $u_1 = (-1)^1 = -1$ et $u_2 = (-1)^2 = 1$.
La suite (u_n) n'est donc ni croissante ni décroissante. Elle n'est pas constante non plus.

2.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2-(n+1)}{2+(n+1)} - \frac{2-n}{2+n} \\ &= \frac{1-n}{3+n} - \frac{2-n}{2+n} \\ &= \frac{(1-n)(2+n)-(3+n)(2-n)}{(3+n)(2+n)} \\ &= \frac{2+n-2n-n^2-(6-3n+2n-n^2)}{(3+n)(2+n)} \\ &= \frac{2-n-n^2-6+n+n^2}{(3+n)(2+n)} \\ &= \frac{-4}{(3+n)(2+n)} \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc décroissante.

3.

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n &= (n+1)^2+2(n+1)-1-\left(n^2+2n-1\right)\\ &= n^2+2n+1+2n+2-1-n^2-2n+1\\ &= 2n+3\\ &> 0\end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc croissante.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\sqrt{2n^2-7n-4}$.

1. A partir de quel rang la suite (u_n) est-elle définie?
2. En déduire les trois premiers termes de cette suite.

---

1. On considère le polynôme $P(x)=2x^2-7x-4$.
   Son discriminant est :
   $\Delta=(-7)^2-4\times 2\times(-4)=81>0$.
   Il possède deux racines réelles :
   $x_1=\dfrac{7-\sqrt{81}}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{7+\sqrt{81}}{4}=4$
   Son coefficient principal est $a=2>0$.
   Par conséquent $P(x)\geqslant 0$ sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup[4;+\infty[$.
   Or $u_n=\sqrt{P(n)}$.
   Par conséquent la suite (u_n) est définie à partir de $n=4$.

2. $u_4=0$, $u_5=\sqrt{11}$ et $u_6=\sqrt{26}$.

Exercice 5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=5\sqrt{n}-3$ et $v_n=\dfrac{-2}{n+1}+1$.

1. Calculer les deux premiers termes de chaque suite.
2. Calculer le quinzième terme de chaque suite.
3. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

---

1. $u_0=5\sqrt{0}-3=-3$ et $u_1=5\sqrt{1}-3=2$
   $v_0=\dfrac{-2}{0+1}+1=-1$ et $v_1=\dfrac{-2}{1+1}+1=0$

2. Comme le premier terme de chaque suite commence au rang 0 on calcule :
   $u_{14}=5\sqrt{14}-3$ et $v_{14}=\dfrac{-2}{15}+1=\dfrac{13}{15}$

3.

$$\begin{aligned}u_{n+1}-un &= 5\sqrt{n+1}-3-\left(5\sqrt{n}-3\right)\\ &= 5\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\\ &> 0\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= \frac{-2}{n+2}+1-\left(\frac{-2}{n+1}+1\right)\\ &= \frac{-2}{n+2}+\frac{2}{n+1}\\ &= \frac{-2(n+1)+2(n+2)}{(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\\ &> 0\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc croissante.

Exercice 6

On considère les suites (u_n) et (v_n) définie par :

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=-{u_n}^2+u_n-1\end{cases}\text{ et }\begin{cases}v_1=5\\ v_{n+1}=v_n+\dfrac{2}{n}\end{cases}.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de ces deux suites.
2. Représenter graphiquement ces quatre premiers termes sur un même graphique.
3. À l'aide de la calculatrice, calculer u_{10} et v_{10} (on pourra donner une valeur approchée à 10^{-2} près).
4. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

1. $u_0 = 1$

$u_1 = -1^2 + 1^2 - 1 = -1$

$u_2 = -(-1)^2 + (-1) - 1 = -3$

$u_3 = -(-3)^2 + (-3) - 1 = -13$

$v_1 = 5$

$v_2 = 5 + \dfrac{2}{1} = 7$

$v_3 = 7 + \dfrac{2}{2} = 8$

$v_4 = 8 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{26}{3}$

3. A l'aide de la calculatrice on trouve $u_{10} \approx -7,47 \times 10^{144}$ et $v_{10} \approx 6,66$

4.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -u_n{}^2 + u_n - 1 - u_n \\ &= -u_n{}^2 - 1 \\ &< 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= v_n + \frac{2}{n} - v_n \\ &= \frac{2}{n} \\ &> 0 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc croissante.

2.