Préparation au DS n° 4 :

Ex 1 : (*) -

a) $u_n=2+3n$; $u_{n+1}-u_n=(2+3(n+1))-(2+3n)=2+3n+3-2-3n=3$
donc (u_n) est arithmétique avec $r=3$ et $u_0=2$

b) $u_{n+1}=2+u_n ; u_0=1$; $u_{n+1}-u_n=2+u_n-u_n=2$
donc (u_n) est arithmétique avec $r=2$ et $u_0=1$

c) $u_n=\dfrac{3n+1}{2}=0{,}5+1{,}5n$;
$u_{n+1}-u_n=(0{,}5+1{,}5(n+1))-(0{,}5+1{,}5n)=0{,}5+1{,}5n+1{,}5-0{,}5-1{,}5n=1{,}5$
donc (u_n) est arithmétique avec $r=1{,}5$ et $u_0=0{,}5$

d) $u_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{0{,}5\times(0{,}75)^{n+1}}{0{,}5\times(0{,}75)^n}=\dfrac{(0{,}75)^{n+1}}{(0{,}75)^n}=(0{,}75)^{n+1-n}=0{,}75$
donc (u_n) est géométrique avec $q=0{,}75$ et $u_0=0{,}5$

e) $u_n=5^{n+1}$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(5)^{n+2}}{(5)^{n+1}}=(5)^{n+2-n-1}=5$
donc (u_n) est géométrique avec $q=5$ et $u_0=5$

f) $u_n=2^n+2n$; $u_0=1, u_1=4, u_2=8$ donc $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ et $\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_1}{u_0}$
donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

g) $5u_{n+1}-2u_n=1 ; u_0=-1$; $u_{n+1}=0{,}4u_n+0{,}2$ donc $u_1=-0{,}2 , u_2=0{,}12$
donc $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ et $\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_1}{u_0}$
donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

h) $u_n=n^2-n$; $u_0=0 ; u_1=0 ; u_2=2 ; u_3=6 ; u_4=12$
donc $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ et $\dfrac{u_4}{u_3}\neq\dfrac{u_3}{u_2}$
donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

Ex 2 : (*) - Calculer les sommes :

$S_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{8192}$; (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=0{,}5$ et de raison $q=0{,}5$ donc $u_n=0{,}5\times(0{,}5)^n$ on cherche n tel que $u_n=\dfrac{1}{8192}$ on trouve $n=12$ donc $S_1=0{,}5\times\dfrac{1-(0{,}5)^{13}}{1-0{,}5}\simeq 0{,}999878$

$S_2=4+7+10+\cdots+172$; (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_0=4$ et de raison $r=3$ donc $u_n=4+3n$ or $172=4+3\times 56$
donc $S_2=\dfrac{4+172}{2}\times 57=5016$

$S_3=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots-\dfrac{1}{6561}$; (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=\dfrac{1}{3}$ et de raison $q=\dfrac{-1}{3}$ donc $u_n=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$ on cherche n tel que $u_n=\dfrac{-1}{6561}$ on trouve $n=7$ donc $S_3=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^8}{1-\left(\frac{-1}{3}\right)}\simeq 0{,}249962$

$S_4=5+\dfrac{17}{3}+\dfrac{19}{3}+7+\cdots+63$; (u_n) est une suite arithmétique de 1er terme $u_0=5$ et de raison $r=\dfrac{2}{3}$ donc $u_n=5+\dfrac{2}{3}n$ or $63=5+\dfrac{2}{3}\times 87$
donc $S_4=\dfrac{5+63}{2}\times 88=2992$

$S_5=\dfrac{1}{8}+\dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\cdots+16\sqrt{2}$; (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=\dfrac{1}{8}$ et de raison $q=\sqrt{2}$ donc $u_n=\dfrac{1}{8}\times(\sqrt{2})^n$ on cherche n tel que $u_n=16\sqrt{2}$ on trouve $n=15$ donc $S_5=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1-(\sqrt{2})^{16}}{1-(\sqrt{2})}\simeq 76{,}953057$

Ex 4 : **(**)** - Soit (u_n) la suite définie par $u_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

1) Dresser la table de valeurs et émettre des conjectures

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	2	1,33	0,88	0,59	0,4	0,26	0,17

Conjectures :

- (u_n) est minorée par 0 et majorée par 2
- (u_n) est géométrique
- (u_n) est convergente vers 0
- (u_n) est décroissante

2) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\times(\frac{2}{3})^{n+1}}{2\times(\frac{2}{3})^n}=\frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{(\frac{2}{3})^n}=(\frac{2}{3})^{n+1-n}=\frac{2}{3}$$

donc (u_n) est géométrique de 1er terme $u_0=2$ et de raison $q=\frac{2}{3}$

3) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=(2\times(\frac{2}{3})^{n+1})-(2\times(\frac{2}{3})^n)=2\times((\frac{2}{3})^n\times(\frac{2}{3})^1-(\frac{2}{3})^n\times 1)$$

$$=2\times(\frac{2}{3})^n\times(\frac{2}{3}-1)=2\times(\frac{2}{3})^n\times(\frac{-1}{3})=(\frac{-2}{3})\times(\frac{2}{3})^n$$

or $\frac{-2}{3}<0$ et $(\frac{2}{3})^n>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$ donc (u_n) est décroissante

4) Calculer la limite de la suite (u_n)

$0<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{+\infty}(\frac{2}{3})^n=0$ d'où $\lim\limits_{+\infty}(u_n)=0$

5) On pose $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$

a) $S_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=2\times\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=6\times(1-(\frac{2}{3})^{n+1})$

b) $0<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim\limits_{+\infty}(\frac{2}{3})^{n+1}=0$ d'où $\lim\limits_{+\infty}(S_n)=6\times(1-0)=6$

Ex 6 : **(**)** - Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=0,5\,u_n+2,5$ et $u_0=1$

1) a) Dresser la table de valeurs et émettre des conjectures

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	1	3	4	4,5	4,75	4,88	4,94

Conjectures :

- (u_n) est minorée par 1 et majorée par 5
- (u_n) est convergente vers 5
- (u_n) est croissante

b) $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_1}{u_0}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) On pose la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-5$

a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{n+1}-5}{u_n-5}=\frac{0,5\,u_n+2,5-5}{u_n-5}=\frac{0,5\,u_n-2,5}{u_n-5}=\frac{0,5\,(u_n-5)}{u_n-5}=0,5$$

donc (v_n) est géométrique de 1er terme $v_0=-4$ et de raison $q=0,5$

b) $v_n=v_0\times q^n=-4\times(0,5)^n$ donc $u_n-5=-4\times(0,5)^n$

donc $u_n=5-4\times(0,5)^n$

c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=(5-4\times(0,5)^{n+1})-(5-4\times(0,5)^n)=-4\times(0,5)^{n+1}+4\times(0,5)^n$$

$$u_{n+1}-u_n=4\times(-(0,5)^n\times 0,5+(0,5)^n)=4\times(0,5)^n\times(-0,5+1)=2\times(0,5)^n$$

or $2>0$ et $(0,5)^n>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ donc (u_n) est croissante

d) Déterminer la limite de la suite (u_n)

$0<0,5<1$ donc $\lim\limits_{+\infty}(0,5)^n=0$ d'où $\lim\limits_{+\infty}(u_n)=5-4\times 0=0$