Ex 1 : Étude de fonctions polynômes

PARTIE A : Etude d'une fonction polynôme de degré 2 :

On note (C_1) la courbe représentative de la fonction définie sur $[-3\,;\,3]$ par : $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1$.

1. En utilisant les propriétés des fonctions polynômes de degré 2 et sans utiliser la dérivée de f, étudier les variations de la fonction f sur $[-3; 3]$.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire $f'(-1)$.
3. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_1) en $x = -1$.
   b) Tracer (T) et (C_1) dans le repère $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath})$ donné en page 2.

PARTIE B : Etude d'une fonction polynôme de degré 3 :

On note (C_2) la courbe tracée en page 2 représentative de la fonction définie sur $[-3\,;\,3]$ par :

$$g(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1.$$

1. a) Déterminer $g'(x)$, dérivée de la fonction g.
   b) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet deux solutions -1 et 2.
   c) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[-3\,;\,3]$.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection des courbes (C_1) et (C_2).

Ex 2 : Trigonométrie – *Les 2 parties sont indépendantes*

Partie A

On donne $\cos x = \frac{3}{4}$ et $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$.

1. Sur un cercle trigonométrique, placer le point M associé à x.
2. Quelle est la valeur exacte de $\sin x$?
3. Déterminer les valeurs exactes de :
   a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
   b) $\cos(\pi - x)$

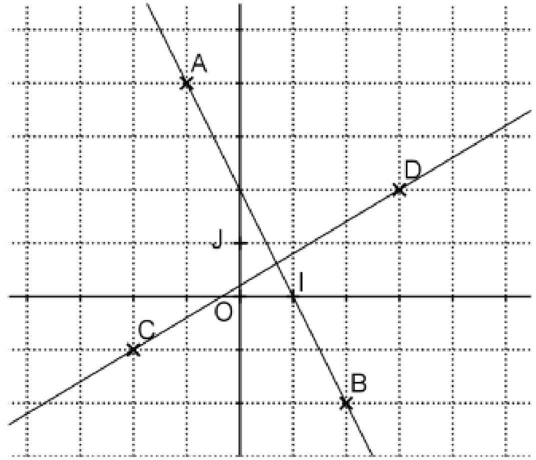
Partie B

Résoudre les équations trigonométriques ci-dessous et construire les points solutions dans le cercle trigonométrique

1. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans l'intervalle $[0; 2\pi[$
2. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$

Ex 3 : Équations de droites & Systèmes

On donne le graphique ci-contre



1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CD)
3. Justifier que les droites (AB) et (CD) sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection
4. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (d) parallèle à (AB) passant par C

Ex 4 : Suites numériques & Algorithmes

Dans un jardin botanique, le nombre de coccinelles à la fin de l'année 2016 est de 250. On estime qu'à partir de 2017, la population de coccinelles double en janvier de chaque année lors de la saison des amours. Cependant, au cours de l'année écoulée, on estime le nombre de coccinelles mortes à 225.

1. On note u_n le nombre de coccinelles à la fin de l'année $2016 + n$. On a ainsi $u_0 = 250$.
   (a) Calculer u_1 et u_2. Interpréter les résultats.
   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 2u_n - 225$.
2. Le jardin est en surpopulation de coccinelles lorsque leur nombre dépasse 1500.
   (a) Olivier, qui gère le jardin, décide de créer un algorithme pour savoir après combien d'années la surpopulation aura lieu. Lequel de ces algorithmes lui permettra de résoudre ce problème ? *(Justifier la réponse.)*

Algorithme A :

```
n prend la valeur 0
u prend la valeur 250
Tant que u < 1500, faire
    u prend la valeur 2u − 225
    n prend la valeur n + 1
Fin tant que
Afficher n
```

Algorithme B :

```
n prend la valeur 0
u prend la valeur 250
Tant que u > 1500, faire
    u prend la valeur 2u − 225
    n prend la valeur n + 1
Fin tant que
Afficher n
```

Algorithme C :

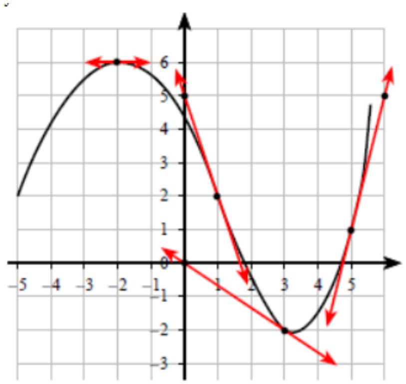
```
u prend la valeur 250
Tant que u < 1500, faire
    n prend la valeur 0
    u prend la valeur 2u − 225
    n prend la valeur n + 1
Fin tant que
Afficher n
```

   (b) À l'aide de la calculatrice, trouver en quelle année la surpopulation de coccinelles aura lieu.

Ex 5 : Fonction & lectures graphiques

On donne le graphique ci-contre

1) Donner les valeurs de f'(-2), f'(1), f'(3), f'(5)
2) Dresser le tableau de variations de f
3) Indiquer les extrema locaux de f
4) Déterminer les équations des tangentes à Cf aux points d'abscisses a=1, a=3, a=5



Ex 6 : Étude d'une fonction rationnelle – fonction auxiliaire polynômiale

PARTIE A : On considère la fonction g définie sur sur $I = [-2; 10]$

par $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 5$.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in I$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur I.
3. Préciser le minimum et le maximum de g sur I.
4. En déduire que, pour tout x de l'intervalle I, $g(x) > 0$.

PARTIE B : f est la fonction définie sur I par : $f(x) = \frac{x^3-5}{x+3}$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+3)^2}$.

2. a) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   b) Établir le tableau de variation de la fonction f sur I.
   c) Déterminer les extremums de f sur I.

Ex 7 : 2nd degré – équations – inéquations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^2 + 16x + 6$.

1) Déterminer la forme factorisée de $f(x)$.

2) Montrer que sa forme canonique est donnée par $f(x) = 8(x+1)^2 - 2$.

3) Utiliser la forme la plus appropriée pour :

a) Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

b) Calculer $f(-1)$ et $f(\sqrt{2})$.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 6$.

d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \geq -4$.

Ex 8 : Probabilités

Lors d'une opération de promotions exceptionnelles d'un grand magasin de bricolage, on s'intéresse aux ventes de deux articles particuliers du rayon « Outillage motorisé » : une meuleuse et une scie sauteuse.
Pendant cette période de promotions, une enquête réalisée sur 300 clients de ce magasin montre que :

- 63 clients ont acheté une meuleuse ;
- 80 clients ont acheté une scie sauteuse ;
- 5 % des clients ayant acheté une scie sauteuse ont aussi acheté une meuleuse.

Chaque client a acheté au plus une scie sauteuse et au plus une meuleuse.

1) Construire un tableau croisé de la situation

2) Quel est le pourcentage de clients ayant acheté une meuleuse ?
3) L'affirmation suivante est-elle vraie : « Au moins 2 % des clients ont acheté les deux outils (meuleuse et scie sauteuse) » ? Justifier.
4) On choisit au hasard un client de l'enquête.
On note M l'événement « Le client a acheté une meuleuse » et $\overline{M}$ l'événement contraire.
On note S l'événement « Le client a acheté une scie sauteuse » et $\overline{S}$ l'événement contraire.
a) Calculer $p_M(S)$. On arrondira à 10^{-3} près.
b) Calculer $p(\overline{S} \cap M)$. On arrondira à 10^{-3} près.
5) Calculer la probabilité que le client ait acheté une meuleuse sachant qu'il a acheté une scie sauteuse.

Ex 9 : Suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$, et pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1) Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2 et u_3.

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - 4$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Déterminer v_n en fonction de n.

c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 5\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$.

d) Calculer la limite de la suite (u)

Ex 10 : Suite homographique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$

On pose la suite (v_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique
b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer sa limite