Le raisonnement par récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est une forme de raisonement mathématique dont l'objet est de démontrer une propriété de *tous* les entiers naturels, ou plus généralement d'une *infinité* d'entiers naturels. Il énonce que, pour qu'une propriété soit vérifiée par tout entier, il suffit :

- qu'elle soit vérifiée en 0 ;
- qu'elle " passe au suivant " : si elle est vérifiée pour un entier alors elle l'est pour l'entier qui suit.

On peut dire la même chose de façon ensembliste :

Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments alors cet ensemble contient tous les entiers naturels.

Le raisonnement par récurrence est intimement lié à la propriété de bon ordre de **N**, l'ensemble des entiers naturels, qui dit que

tout ensemble non vide d'entiers naturels possède un plus petit élément.

Certaines formes de ce raisonnement se généralisent d'ailleurs naturellement aux bons ordres infinis, on parle alors de récurrence transfinie, de récurrence ordinale (tout bon ordre est isomorphe à un ordinal) ; le terme d'**induction** est aussi souvent utilisé dans ce contexte. Le raisonnement par récurrence peut se généraliser enfin aux relations bien fondées. Dans certains contextes, logique ou informatique, pour des structures de nature arborescente, on parle de récurrence structurelle.

Récurrence simple

Pour démontrer qu'une propriété *P*(*n*), définie sur les entiers naturels, est vraie pour tous ceux-ci, il suffit de démontrer que

- *P*(0)
- (pour tout entier *n*) $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

La première propriété s'appelle l'initialisation, et la seconde l'hérédité.

On en déduit immédiatement que pour montrer *P*(*n*) à partir d'un certain rang n_0 seulement, il suffit de montrer :

- $P(n_0)$
- (pour tout entier $n \geq n_0$) $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

Montrons que la somme des *n* premiers entiers 1 + 2 + ... + *n* est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

- Cette propriété est vraie pour *n* = 1 puisque $1 = \frac{1 \times 2}{2}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors :

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La propriété est bien héréditaire.