Ex 1 : *lectures graphiques*

1) On a le tableau suivant :

x	-6	-3	-1	3	6
$f(x)$	-1	-2	1	3	0
$f'(x)$	-1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{2}$

2) On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 3$ et $h = 0,12$, et on dérive $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. On a alors :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a) \iff f(9,12) \approx f(9) + 0,12 f'(9) \iff$$
$$\sqrt{9,12} \approx \sqrt{3} + 0,12 \times \frac{1}{2\sqrt{9}} \iff \sqrt{9,12} \approx 3,02$$

Valeur à comparer avec la valeur que donne la calculatrice : $\approx 3,019\,933$.

Ex 2 : *Etude d'une fonction rationnelle*

1) $D_f = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 \geqslant 2 > 0$ (ne s'annule pas).

2) $f'(x) = \dfrac{8(x^2+2) - 2x(8x+4)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8x^2 + 16 - 16x^2 - 8x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-8x^2 - 8x + 16}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8(-x^2 - x + 2)}{(x^2+2)^2}$

3) $f'(x) = 0 \iff -x^2 - x + 2 = 0$ d'où $x_1 = 1$ racine évidente, $P = -2$ donc $x_2 = -2$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$f(-2) = \dfrac{-16+4}{4+2} = \dfrac{-12}{6} = -2$

$f(1) = \dfrac{8+4}{1+2} = \dfrac{12}{3} = 4$

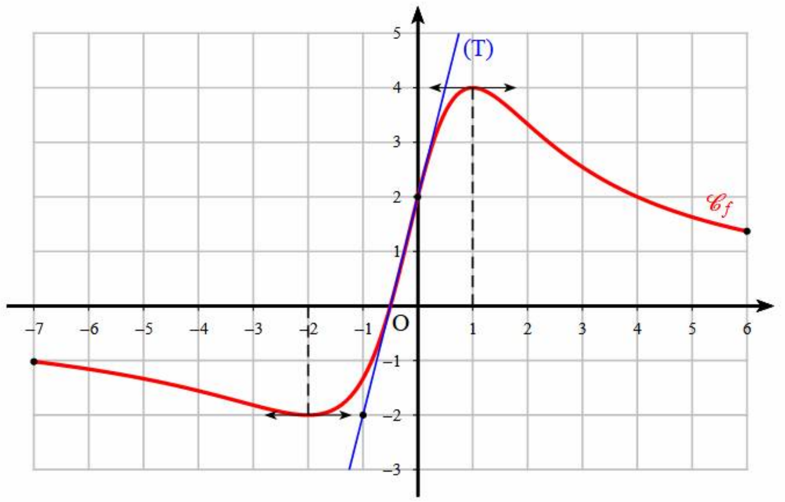
4) Quand x devient "très grand" alors $8x+4 \approx 8x$ et $x^2+2 \approx x^2$ donc $f(x) \approx \dfrac{8x}{x^2} \approx \dfrac{8}{x}$.
Comme 8 sur "très grand" devient "très petit" alors $f(x)$ tend vers 0.

5) La tangente (T) en 0 a comme équation : $y = f'(0)x + f(0)$

$f(0) = 2$ et $f'(0) = \dfrac{16}{4} = 4$ donc (T) : $y = 4x + 2$.

6) D'après le tableau de variation : $\forall x \in \mathbb{R},\ -2 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

7) Pour tracer (T), on peut prendre les points $(-1\,;-2)$ et $(0\,;\,2)$.
Pour tracer $\mathscr{C}_f$, on peut calculer en plus deux images : $f(-7) \approx -1$ et $f(6) \approx 1,4$



Ex 3 : *Equation de la tangente*

1) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$.

2) $f'(x) = 0 \iff x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$.

$\mathscr{C}_f$ admet donc deux tangentes horizontales en -2 et 2.

3) Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $a = 1$: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

$f(1) = 1 - 12 + 7 = -4$ et $f'(1) = 3 - 12 = -9$ donc

$y = -9(x-1) - 4 \iff y = -9x + 5$.

4) signe de $f'(x)$ = signe de $(x^2 - 4)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	23	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

5) $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite d d'équation $y = -\dfrac{11}{3}x + 1$ ssi,

$f'(x) = -\dfrac{11}{3} \iff 3(x^2 - 4) = -\dfrac{11}{3} \iff x^2 - 4 = -\dfrac{11}{9} \iff x^2 = -\dfrac{11}{9} + 4 \iff$
$x^2 = \dfrac{25}{9} \iff x = -\dfrac{5}{3}$ ou $x = \dfrac{5}{3}$

$\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à la droite d en $-\dfrac{5}{3}$ et en $\dfrac{5}{3}$

Ex 4 : *Etude d'une fonction polynôme*

1) $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x = 4x(2x^2 - 3x + 1)$.

2) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Racine de $2x^2 - 3x + 1$, $x_1 = 1$ racine évidente $P = \frac{1}{2}$ donc $x_2 = \frac{1}{2}$.

Pour déterminer le signe de la dérivée, on remplit un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3) On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{-7}{8}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = \frac{-7}{8}$
- $f(1) = 2 - 4 + 2 - 1 = -1$

On pourrait montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$

4) D'après le tableau de variation :

- sur $]-\infty\,;\,0]$ la fonction change de signe donc peut s'annuler.
- sur $]0\,;\,1[$ la fonction est toujours négative donc ne peut s'annuler.
- sur $[1\,;+\infty[$ la fonction change de signe donc peut s'annuler.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions.

Pour trouver les valeurs approchées des deux solutions avec sa calculatrice, on peut tracer la fonction f avec comme fenêtre $X \in [-5; 5]$ et $Y \in [-2; 5]$ puis avec la touche *calcul* et la fonction *zéro*, on trouve les valeurs :

$x_1 \approx -0,478$ et $x_2 \approx 1,478$

Ex 5 : *Trigonométrie & équations*

1) $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, donc $\cos x < 0$

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = +\frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$$

2) $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$

3) $2\sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

On obtient alors les solutions : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

4) a) $X \in [-1\,;\,1]$

b) $2X^2 + 9X + 4 = 0$, on calcule $\Delta = 81 - 32 = 49 = 7^2$

On obtient deux solutions $X_1 = \frac{-9+7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-9-7}{4} = -4$.

c) Seule la solution X_1 est acceptable car comprise entre (-1) et 1.

On revient à x : $\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

On obtient les solutions $\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

Ex 6 : *Trigonométrie & valeurs principales*

1) θ_1 et θ_2 sont deux mesures d'un même angle, s'il existe un entier k tel que : $\theta_2 = \theta_1 + k2\pi$.

$$\frac{117\pi}{8} = \frac{5\pi + 112\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} + \frac{112\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} + 14\pi = \frac{5\pi}{8} + 7(2\pi)$$

$\frac{117\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}$ sont donc deux mesures d'un même angle.

2) $-\frac{7\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\frac{53\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

3) $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\cos\frac{11\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$