Ex 1 : Les Suites

Partie A

on a : $u_0 = 300\,€$ et $u_1 = 310\,€$

$u_{n+1} = u_n + 10$ donc la suite (u_n) est arithmétique de 1er terme 300 et de raison $r = 10$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 300 + 10n$

en 2030, le prix sera de : $u_{21} = 510\,€$

en 25 ans le prix total est de :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24} = \frac{u_0 + u_{24}}{2} \times 25 = \frac{300 + 540}{2} \times 25 = 10500\,€$$

Partie B

on a : $v_0 = 300\,€$ et $v_1 = 300 \times 1{,}025 = 307{,}50\,€$

$v_{n+1} = v_n \times 1{,}025$ donc la suite (v_n) est gémétrique de 1er terme 300 et de raison $q = 1{,}025$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 300 \times 1{,}025^n$

en 2030, le prix sera de : $v_{21} = 384\,€$

en 25 ans le prix total est de :

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{25}}{1 - q} = 300 \times \frac{1 - 1{,}025^{25}}{1 - 1{,}025} \simeq 10247\,€$$

Partie C

le prix de l'assureur B devient plus grand que celui de l'assureur A en l'année 2043 car $u24 \simeq 540$ et $v_{40} \simeq 542$

Ex 2 : Second degré

l'équation $2x^2 + 4x - 16 = 0$ donne $\Delta = 144$

il y a donc 2 solutions : $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{144}}{4} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{144}}{4} = 2$

l'équation $2x^4 + 4x^2 - 16 = 0$ est issue de la précédente en posant $X = x^2$

on obtient alors $2X^2 + 4X - 16 = 0$ donc $X = -4$ ou $X = 2$

or $X > 0$ donc $X = 2$ donc $x^2 = 2$ donc $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

enfin l'inquation $-5x^3 + 2x^2 - x < 0$ donne $(x)(-5x^2 + 2x - 1) < 0$

on effectue alors un tableau de signes

x	$-\infty$		0			$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$	
$-5x^2+2x-1$		$-$		$-$	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$-$	

Ainsi $S =]0\,;+\infty[$

Ex 3 : Dérivation

Soit $f(x) = \dfrac{6x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ avec $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{6(x^2 - 2x + 3) - (6x - 3)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{6x^2 - 12x + 3 - (12x^2 - 6x - 12x + 6)}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 12x + 18 - 12x^2 + 18x - 6}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{-6x^2 + 6x + 12}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

on cherche les racines de f' soit $f'(x) = 0$ donc $-6x^2 + 6x + 12 = 0$ en vérifiant au préalable que $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ (avec un Δ)

donc on obtient $x^2 - x - 2 = 0$ donc $x = -1$ ou $x = 2$ (avec un Δ)

on dresse alors le tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$-6x^2+6x+12$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(x^2-2x+3)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit alors le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘		↗	3	↘	
			-1,5				0

L'équation de la tangente (T_1) est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

or $f'(1) = 3$ et $f(1) = 1{,}5$ donc on déduit que $(T_1) : y = 3x - 1{,}5$

on remarque alors que (T_1) "traverse" la courbe C_f

cela signifie que $A(1\,;1{,}5)$ est un point d'inflexion de la courbe C_f

Ex 4 : Trigonométrie

on donne un angle $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ avec $\sin(x)=\frac{1}{4}$

on sait que $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ donc $\cos^2(x)+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1$

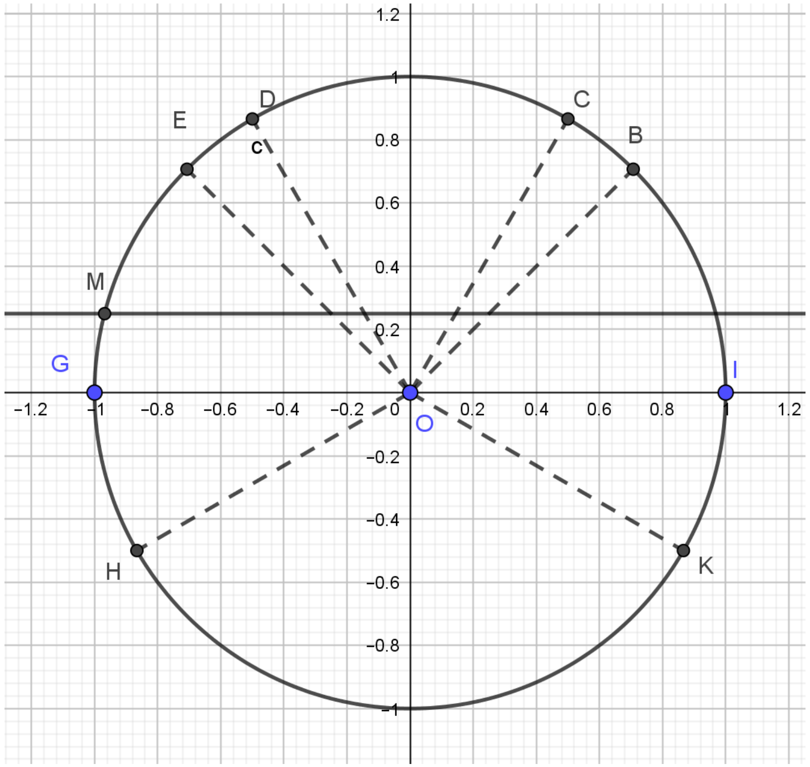
donc $\cos^2(x)=\frac{15}{16}$ donc $\cos(x)=-\sqrt{\frac{15}{16}}$ ou $\cos(x)=\sqrt{\frac{15}{16}}$

soit encore $\cos(x)=\frac{-\sqrt{15}}{4}$ ou $\cos(x)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

or $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ donc $\cos(x)<0$ donc $\cos(x)=\frac{-\sqrt{15}}{4}$

on place alors le point M sur le cercle trigonométrique $(C)\cap(d)=M$

où (C) est le cercle trigonométrique et $(d): y=\frac{1}{4}$ avec $x_M<0$



On lit directement sur le cercle trigonométrique $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$,

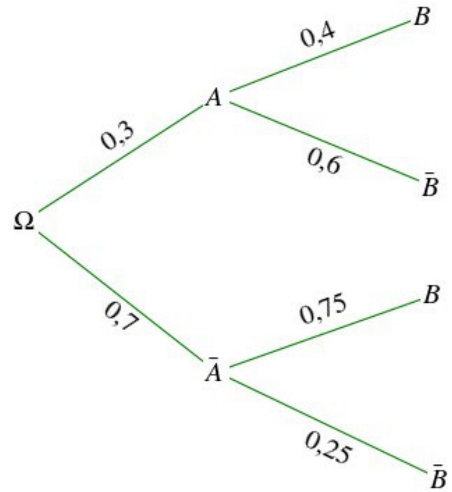
$K\left(\frac{-13\pi}{6}\right)$, $I(2\pi)$, $G(5\pi)$, $H\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $D\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $E\left(\frac{-5\pi}{4}\right)$

Les coordonnées du point H sont : $H\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$

ainsi $Aire_{OGH}=\frac{OG\times h}{2}=\frac{1\times 0{,}5}{2}=0{,}25$

Ex 5 : Probabilités

On obtient l'arbre pondéré ci-contre



$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$
$=0{,}3\times 0{,}4=0{,}12$

$P(B)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$
$=0{,}12+0{,}7\times 0{,}75=0{,}645$

$P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0{,}3\times 0{,}6}{1-0{,}645}\simeq 0{,}507$

donc la probabilité que Sophie pioche une dragée contenant une amande sachant qu'elle est rose est de 50,7%

$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}3\times 0{,}4}{0{,}645}\simeq 0{,}186$

donc la probabilité que Sophie pioche une dragée contenant une amande sachant qu'elle est bleue est de 18,6%

Ainsi, elle a intérêt à choisir des dragées roses

Enfin $P(A)\times P(B)=0{,}3\times 0{,}645=0{,}1935$ et $P(A\cap B)=0{,}12$
donc $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$
donc les événements A & B ne sont pas indépendants

Rque : on peut aussi observer que les différents "sous-arbre" ne sont pas identiques ; soit $P_A(B)\neq P_{\overline{A}}(B)$

Ex 6 : Équations de droites

on donne $A(1;2), B(-2;4)$ et $(d): -2x+3y-3=0$

on obtient $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-1\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

soit $M(x;y)\in(AB)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

donc $det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0$

donc $\begin{vmatrix}x-1 & -3\\y-2 & 2\end{vmatrix}=0$ donc $2(x-1)-(-3)(y-2)=0$

d'où $(AB): 2x+3y-8=0$

le milieu de $[AB]$ est $M(-0{,}5;3)$

soit (d') la parallèle à (AB) passant par M

donc une équation cartésienne de (d') est : $(d'): -2x+3y+c=0$

or $M(-0{,}5;3)\in(d')$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de (d')

donc $-2\times(-0{,}5)+3\times3+c=0$ donc $c=-10$

donc $(d'): -2x+3y-10=0$

soit la droite $(D): y=4x-1$

un vecteur-directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

un vecteur-directeur de (D) est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

il est évident que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

donc (d) et (D) sont sécantes en 1 point K

$K(x;y)$ vérifie le système $\begin{cases}y=4x-1\\-2x+3y=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}y=4x-1\\-2x+3(4x-1)=3\end{cases}$

donc $\begin{cases}y=4x-1\\10x=6\end{cases}$ donc $\begin{cases}y=1{,}4\\x=0{,}6\end{cases}$ soit $K(0{,}6;1{,}4)$

figure de la situation :