Préparation finale au Devoir Commun – 1ere spé - *Correction*

Les Suites

Soit $u_n=10\times 0{,}8^n$ avec $n\in\mathbb{N}$

1) Dresser la table de valeurs de la suite (u_n)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	10	8	6,4	5,12	4,1	3,27	2,62	2,1	1,67

2) Donner les conjectures de bases

- la suite (u_n) est décroissante
- la suite est géométrique
- la suite est minorée par 0 et majorée par 10
- la suite est convergente vers 0

3) Déterminer la nature de la suite (u_n)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{10\times 0{,}8^{n+1}}{10\times 0{,}8^n}=0{,}8^{n+1-n}=0{,}8 \quad \text{(=constante)}$$

donc (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0=10$ et de raison $q=0{,}8$

4) Étudier le sens de variation de la suite (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=(10\times 0{,}8^{n+1})-(10\times 0{,}8^n)=10\times(0{,}8^n\times 0{,}8-0{,}8^n\times 1)$$
$$=10\times 0{,}8^n\times(0{,}8-1)=-2\times 0{,}8^n$$

or $-2<0$ et $0{,}8^n>0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$

donc la suite (u_n) est strict décroissante

5) Calculer la somme des 20 premiers termes

$$S=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=10\times\frac{1-0{,}8^{20}}{1-0{,}8}\simeq 49{,}42$$

6) Cette suite est-elle convergente ? Si oui quelle est sa limite ?
On sait que $0<q<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$
donc la suite (u_n) est convergente vers 0

Le Second degré

1) Résoudre l'équation $x^2-10x+9=0$
$\Delta=(-10)^2-4\times 1\times 9=64>0$ donc il y a 2 solutions
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-\sqrt{64}}{2}=1$ ou $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+\sqrt{64}}{2}=9$
donc $S=\{1;9\}$

2) Résoudre l'inéquation $x^2-10x+9\geqslant 0$
on réalise un tableau de signes de $f(x)=x^2-10x+9$

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Donc $S=]-\infty;1]\cup[9;+\infty[$

3) En déduire les solutions de l'équation $x^4-10x^2+9=0$
on pose $X=x^2$ donc $X=x^4$
donc l'équation devient $X^2-10X+9=0$
donc $X=1$ ou $X=9$ donc $x^2=1$ ou $x^2=9$
donc $x=-1$ ou $x=1$ ou $x=-3$ ou $x=3$
donc $S=\{-3;-1;1;3\}$

4) Déterminer les solutions de l'équation $x-10\sqrt{x}+9=0$
on pose $X=\sqrt{x}$ donc $X^2=x$
donc l'équation devient $X^2-10x+9=0$
donc $X=1$ ou $X=9$ donc $\sqrt{x}=1$ ou $\sqrt{x}=9$
donc $x=1$ ou $x=81$ donc $S=\{1;81\}$

La Dérivation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x^2-4x-2}{x^2+1}$

1) Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x)=\frac{2(2x^2+3x-2)}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}=\frac{(2x-4)(x^2+1)-(2x)(x^2-4x-2)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2x^3+2x-4x^2-4-2x^3+8x^2+4x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2}$$

2) Étudier le signe de $f'(x)$; en déduire le tableau de variations de f

les racines de f' vérifient $4x^2+6x-4=0$
on obtient facilement : $x=-2$ ou $x=0,5$

le tableau de signe de $f'(x)$ est :

x	$-\infty$		-2		$0,5$		$+\infty$
$4x^2+6x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Le tableau de variations de f est :

x	$-\infty$		-2		$0,5$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

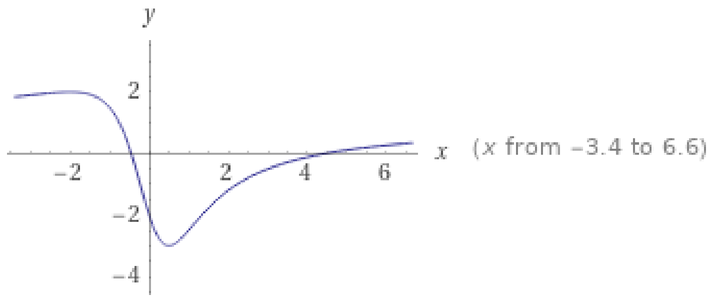
4) En déduire les éventuels extrema locaux de f

- la fonction f admet un minimum local en $x=0,5$
- la fonction f admet un maximum local en $x=-2$
- <u>Complément</u> : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$
  donc , $\forall x\in\mathbb{R}$: $-3\leqslant(x)\,f(x)\leqslant 2$ (on dit que f est bornée)

5) Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 1

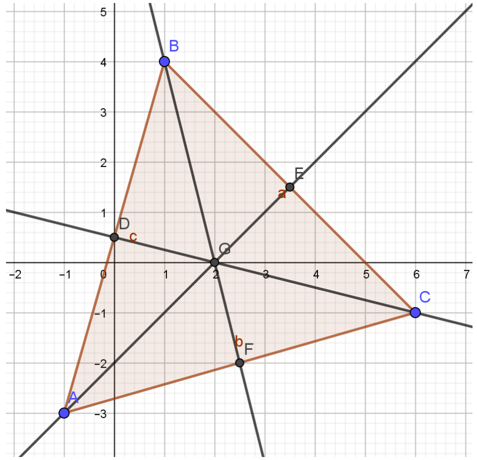
la tangente (T_a) a pour équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$
donc ici $(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$
or $f(1)=-2,5$ et $f'(1)=1,5$ donc $(T): y=1,5x-4$

6) Construire l'allure du graphique C_f ainsi que la tangente (T)



Les Droites

On donne les points $A(-1;-3), B(1;4), C(6;-1)$



1) Faire une figure

2) Déterminer les coordonnées des mileux respectifs des segments $[AB],[BC],[AC]$ notés D, E, F
$D(0;0,5)$; $E(3,5;1,5)$; $F(2,5;-2)$

3) Déterminer les équations cartésiennes des médianes (AE) et (BF) ; on a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}4,5\\4,5\end{pmatrix}$

donc $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (AE)

soit $M(x;y)\in(AE)$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x+1\\y+3\end{pmatrix}$

donc $-1(x+1)+1(y+3)=0$ d'où $(AE): -x+y+2=0$
on obtient de même $(BF): 4x+y-8=0$

4) Déterminer les coordonnées de l'intersection de ces 2 médianes , noté G

Soit $G(x;y)\in(AE)\cap(BF)$ donc $\begin{cases}-x+y=-2\,(L_1)\\ 4x+y=8\,(L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases}-x+y=-2\,(L_1)\\ -5x=-10\,(L_1-L_2)\end{cases}$ donc $\begin{cases}-x+y=-2\,(L_1)\\ x=2\,(L_2)\end{cases}$

donc $\begin{cases}y=0\,(L_1)\\ x=2\,(L_2)\end{cases}$ donc on obtient $G(2;0)$

5) Que représente G pour le triangle ABC ?
Ainsi G est l'intersection des 3 médianes du triangle ABC
on dit que G est le centre de gravité du triangle ABC

<u>Rque</u> : on dit aussi (pour les passionés de "*mécanique*" que G est le point d'équilibre des masses de la plaque homogène ABC