Correction 1

Une video est accessible

1. Le dénominateur est un polynôme du second degré ; son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4{\times}2{\times}1 = -7$$

Le discriminant est strictement négatif ; son dénominateur ne s'annule pas : son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v où :
$u(x) = 3x^2 - 2x - 2 \quad ; \quad v(x) = 2x^2 + x + 1$
qui admettent pour dérivée les fonctions :
$u'(x) = 6x - 2 \quad ; \quad v'(x) = 4x + 1$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= \frac{(6x-2)\cdot(2x^2+x+1) - (3x^2-2x-2)\cdot(4x+1)}{(2x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{(12x^3+6x^2+6x\text{-}4x^2\text{-}2x\text{-}2)\text{-}(12x^3+3x^2\text{-}8x^2\text{-}2x\text{-}8x\text{-}2)}{(2x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{(12x^3+2x^2+4x-2) - (12x^3-5x^2-10x-2)}{(2x^2+x+1)^2}$$
$$= \frac{7x^2+14x}{(2x^2+x+1)^2}$$

b. Le signe de la dérivée ne dépend que du signe du numérateur ; on peut factoriser le numérateur :
$7x^2 + 14x = 7x(x+2)$
Le signe du coefficient du terme du second degré est négatif ; on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Effectuons les calculs suivantes :

- $f(-2) = \dfrac{3{\times}(-2)^2 - 2{\times}(-2) - 2}{2{\times}(-2)^2 + (-2) + 1} = \dfrac{14}{7} = 2$
- $f(0) = \dfrac{3{\times}0^2 - 2{\times}0 - 2}{2{\times}0^2 + 0 + 1} = \dfrac{-2}{1} = -2$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Variation de f	$-\frac{3}{2}$	↗	2	↘	-2	↗	$\frac{3}{2}$

3. Puisque $2 > \dfrac{3}{2}$ et $-2 < -\dfrac{3}{2}$ et d'après le tableau de variations :

- 2 est la maximum de la fonction f et il est atteint pour $x = -2$;
- -2 est la minimum de la fonction f et il est atteint pour $x = 0$;

Correction 2

1. Un réduction de 3 % est associé à un coefficient multiplicateur de valeur :
$1 - \dfrac{3}{100} = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

- Ainsi, la population en 2013 sera :
$45{,}5{\times}0{,}97 = 44{,}135$ millions d'habitants
- Ainsi, la population en 2014 sera :
$44{,}135{\times}0{,}97 = 42{,}81905$
$\approx 42{,}819$ millions d'habitants

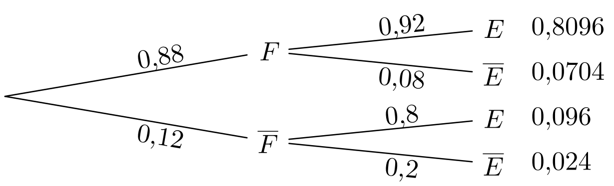
2. a. Ainsi, pour passer d'un terme à son successeur, on multiplie toujours par 0,97 : on en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique.
La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme 45,5 et de raison 0,97.

b. Ainsi, les termes de la suite (u_n) admettent pour formule explicite :
$u_n = 45{,}5{\times}0{,}97^n$

3. La population de ce pays en 2020 est le terme de rang 8. Ainsi, on a :
$u_8 = u_0\cdot q^8 = 45{,}5{\times}0{,}97^8$
$\approx 35{,}6603 \approx 35{,}660$ millions d'habitants

Correction 3

1.



2. a. On a la formule : $\mathcal{P}(\overline{F}) = 1 - \mathcal{P}(F) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$

b. $\mathcal{P}_{\overline{F}}(\overline{E}) = 1 - \mathcal{P}_{\overline{F}}(E) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

c. D'après la formule de la probabilité conditionnelle, on a :
$\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}_F(E){\times}\mathcal{P}(F) = 0{,}92{\times}0{,}88 = 0{,}8096$

d. De même que dans la question précédente, on obtient :
$\mathcal{P}(E \cap \overline{F}) = \mathcal{P}_{\overline{F}}(E){\times}\mathcal{P}(\overline{F}) = 0{,}096$
Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(E \cap \overline{F}) = 0{,}8096 + 0{,}096$
$= 0{,}9056$

e. Tout conducteur ayant au moins ses freins ou son éclairage défectueux fait parti de l'ensemble $\overline{E} \cup \overline{F}$. Hors le complémentaire de cet événement $E \cap F$: c'est à dire que les freins et l'éclairage sont tous les deux en bon état. On obtient :
$\mathcal{P}(\overline{E} \cup \overline{F}) = 1 - \mathcal{P}(E \cap F) = 1 - 0{,}8096 = 0{,}1904$

Correction 4

1. L'équation réduite de la droite (d) permet d'obtenir les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite (d) :
$\vec{u}\,(1\,;3)$

L'équation cartésienne de la droite (Δ) permet d'obtenir les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ directeur de la droite (Δ) :

$\overrightarrow{v}\,(-6\,;2)$

Déterminons la valeur du produit scalaire de ces deux vecteurs :

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 1\times(-6)+3\times2 = -6+6 = 0$

On en déduit que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux : les deux droites (d) et (Δ) sont perpendiculaires.

2. Les droites (d) et (Δ) étant perpendiculaires, elles sont sécantes. Notons $M(x\,;y)$ le point d'intersection.
Les coordonnées de ce point doivent vérifier les équations de ces deux droites.
On obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} y = 3\cdot x - 1 \\ 2\cdot x + 6\cdot y + 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3\cdot x + y = -1 \\ 2\cdot x + 6\cdot y = -4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -18\cdot x + 6\cdot y = -6 \\ 2\cdot x + 6\cdot y = -4 \end{cases}$$

Par soustraction des deux équations membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} -18\cdot x - 2\cdot x &= -6-(-4) \\ -20\cdot x &= -6+4 \\ -20\cdot x &= -2 \\ x &= \frac{-2}{-20} \\ x &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

En utilisant la première équation, on obtient l'ordonnée du point M :

$$y = 3\cdot x - 1 \qquad y = 3\times\frac{1}{10} - 1 \qquad y = \frac{3}{10} - 1$$

$$y = \frac{3}{10} - \frac{10}{10} \qquad y = \frac{3-10}{10} \qquad y = \frac{-7}{10}$$

Le point M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{10}\,;-\frac{7}{10}\right)$

Correction 5

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x) = -2\cdot(3x^2)+3\cdot(2x)+12 = -6\cdot x^2+6\cdot x+12$

2. Le polynôme du second degré définissant la fonction f' a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 6^2-4\times(-6)\times(12) = 36+288 = 324$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{324} = 18$

Le discriminant de ce polynôme étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6-18}{2\times(-6)} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-6+18}{2\times(-6)} = \frac{12}{-12} = -1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. On a les deux images suivantes par la fonction f :

- $f(-4) = -2\times(-4)^3+3\times(-4)^2+12\times(-4)-2$
$= 128+48-48-2 = 126$
- $f(-1) = -2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2+12\times(-1)-2$
$= 2+3-12-2 = -9$
- $f(2) = -2\times2^3+3\times2^2+12\times2-2$
$= -16+12+24-2 = 18$
- $f(5) = -2\times5^3+3\times5^2+12\times5-5$
$= -250+75+60-5 = -117$

Le signe de la dérivée f' permet de déterminer les variations de la fonction f. On obtient le tableau de variations suivant :

x	-4	-1	2	5
Variation de f	126 ↘	-9 ↗	18 ↘	-117

Correction 6

1. Développons cette expression :

$$\begin{aligned} &(2\cdot x-1)\big(a\cdot x^2+b\cdot x+c\big) \\ &= 2a\cdot x^3+2b\cdot x^2+2c\cdot x-a\cdot x^2-b\cdot x-c \\ &= 2a\cdot x^3+\big(2b-a\big)\cdot x^2+\big(2c-b\big)\cdot x-c \end{aligned}$$

Par identification des coefficients de même degré, on obtient le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2\cdot b-a = -18 \\ 2\cdot c-b = 16 \\ -c = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2\cdot b-a = -18 \\ 2\cdot c-b = 16 \\ c = 4 \end{cases}$$

Résolvons la seconde et troisième équations séparement :

$$\begin{aligned} 2\cdot b-a &= -18 \\ 2\cdot b-2 &= -18 \\ 2\cdot b &= -18+2 \\ 2\cdot b &= -16 \\ b &= \frac{-16}{2} \\ b &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\cdot c-b &= 16 \\ 2\times4-b &= 16 \\ 8-b &= 16 \\ -b &= 16-8 \\ -b &= 8 \\ b &= -8 \end{aligned}$$

Ainsi, on a la factorisation :
$f(x) = (2\cdot x-1)\big(2\cdot x^2-8\cdot x+4\big)$

2. Le polynôme $2\cdot x^2-8\cdot x+4$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-8)^2-4\times2\times4 = 64-32 = 32$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = 4\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-8)-4\sqrt{2}}{2\times2} = \frac{8-4\sqrt{2}}{4} = \frac{4\cdot(2-\sqrt{2})}{4} = 2-\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-8)+4\sqrt{2}}{2\times2} = \frac{8+4\sqrt{2}}{4} = \frac{4\cdot(2+\sqrt{2})}{4} = 2+\sqrt{2}$$

Le coefficiennt du terme du second degré de ce polynôme étant strictement positif, on a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
$2{\cdot}x^2-8{\cdot}x+4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2{\cdot}x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction 7

a. $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

b. $\mathcal{P}_A(B) = 1 - \mathcal{P}_A(\overline{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

c. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}8 = 0{,}32$

d. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = \dfrac{\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathcal{P}(\overline{A})} = \dfrac{0{,}24}{0{,}6} = 0{,}4$

e. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

f. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathcal{P}(\overline{A}) \times \mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$