Correction 1

a. $e^{5x+1} = e^{2x}$

De la propriété $\left(e^a = e^b \implies a = b\right)$:

$$5x+1 = 2x$$
$$5x - 2x = -1$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

b. $e^{3x+1} = 1$

$e^{3x+1} = e^0$

De la propriété $\left(e^a = e^b \implies a = b\right)$:

$$3x+1 = 0$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$$

c. $\dfrac{e^{1-3x}}{e} = 1$

$e^{1-3x} = e$

$e^{1-3x} = e^1$

De la propriété $\left(e^a = e^b \implies a = b\right)$:

$$1 - 3x = 1$$
$$-3x = 1 - 1$$
$$-3x = 0$$
$$x = \frac{0}{-3}$$
$$x = 0$$

L'ensemble des solutions de cette équation :

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

Correction 2

Une video est accessible

a. De l'équation :

$$e^x \cdot \left(e^{2x} - e^2\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

- $e^x = 0$: pas de solution
- $e^{2x} - e^2 = 0$

  $e^{2x} = e^2$

  D'après la propriété :

  $\left(e^a = e^b \implies a = b\right)$:

  $2x = 2$

  $x = \frac{2}{2}$

  $x = 1$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{1\}$

b. De l'équation :

$$\left(e^{3x-1} - 1\right)\left(e^{2-x} - e\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

- $e^{3x-1} - 1 = 0$

  $e^{3x-1} - e^0 = 0$

  $e^{3x-1} = e^0$

  D'après la propriété : $\left(e^a = e^b \implies a = b\right)$:

  $3x - 1 = 0$

  $3x = 1$

  $x = \frac{1}{3}$

- $e^{2-x} - e = 0$

  $e^{2-x} = e$

  $e^{2-x} = e^1$

  D'après la propriété : $\left(e^a = e^b \implies a = b\right)$:

  $2 - x = 1$

  $-x = 1 - 2$

  $-x = -1$

  $x = 1$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{3}\,;1\right\}$

c. De l'équation :

$$x \cdot e^x - x = 0$$
$$x \cdot \left(e^x - 1\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

- $x = 0$
- $e^x - 1 = 0$

  $e^x = 1$

  $e^x = e^0$

  D'après la propriété : $\left(e^a = e^b \implies a = b\right)$:

  $x = 0$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \{0\}$

Correction 3

a. On a les transformations suivantes :

$$e^x + e^{-x} = 0$$
$$e^x \cdot \left(1 + e^{-2x}\right) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul ; sachant que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ceci entraîne :

$$1 + e^{-2x} = 0 \implies e^{-2x} = -1$$

Or, la fonction exponentielle étant strictement positive, cette dernière équation n'admet aucune solution :

$$\mathcal{S} = \varnothing$$

b. Cette égalité peut se transformer en :

$$e^{3x+1} = e^{-2x+3}$$
$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-2x+3}} = 1$$
$$e^{3x+1-(-2x+3)} = 1$$
$$e^{5x-2} = 1$$
$$e^{5x-2} = e^0$$

Des propriétés de la fonction exponentielle :

$$5x - 2 = 0$$
$$5x = 2$$
$$x = \frac{2}{5}$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

c. On a :

$$e^{2x}-1=0$$
$$e^{2x}=1$$
$$e^{2x}=e^0$$
Des propriétés de la fonction exponentielle :
$$2x=0$$
$$x=0$$
On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\{0\}$

d. On a les manipulations algébriques suivantes :
$$x\cdot e^{2x}-2\cdot e^{2x}=0$$
$$e^{2x}\cdot(x-2)=0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. Sachant que la fonction exponentielle est strictement positive et ne s'annule pas, on en déduit l'équation :
$$x-2=0$$
$$x=2$$
On en déduit l'ensemble des solutions : $\mathcal{S}=\{2\}$

Correction 4

a. On a :
$$e^x-e^{-x}>0$$
$$e^x\cdot(1-e^{-2x})>0$$
La fonction exponentielle est strictement croissante :
$$1-e^{-2x}>0$$
$$1>e^{-2x}$$
$$e^{-2x}<1$$
$$e^{-2x}<e^0$$
La fonction exponentielle est strictement croissante :
$$-2x<0$$
$$x>0$$
L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\mathbb{R}_+^*$

b. On a les transformations algébriques suivantes :
$$x\cdot e^{-x}-3\cdot e^{-x}<0$$
$$e^{-x}\cdot(x-3)<0$$
Etudions le signe du membre de gauche :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$x-3$		$-$	0	$+$	
$e^{-x}\cdot(x-3)$		$-$	0	$+$	

On en déduit l'ensemble de solution : $\mathcal{S}=]-\infty\,;3[$

Correction 5

1. Etudions l'inéquation :
ddddddd

2. $$e^x+e^{-x}<2$$
$$e^x-2+e^{-x}<0$$
La fonction exponentielle est strictement positif sur $\mathbb{R}$
$$e^x\cdot(e^x-2+e^{-x})<e^x\cdot 0$$
$$e^{2x}-2\cdot e^x+e^{-x+x}<e^x\cdot 0$$
$$e^{2x}-2\cdot e^x+1<0$$
$$(e^x)^2-2\cdot e^x+1<0$$
$$(e^x-1)^2<0$$
Or, le carré d'un nombre réel n'est jamais strictement négatif : $\mathcal{S}=\varnothing$

Correction 6

1. La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :
$f'(x)=3\times(-2)\cdot e^{1-2x}=-6\cdot e^{1-2x}$
La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction f' étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Correction 7

Une video est accessible

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x+1$; $v(x)=e^{-2x+3}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1$; $v'(x)=-2\cdot e^{-2x+3}$

La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=1\cdot e^{-2x+3}+(x+1)\cdot(-2\cdot e^{-2x+3})$$
$$=e^{-2x+3}+\big[(x+1)\cdot(-2)\big]\cdot e^{-2x+3}$$
$$=e^{-2x+3}+(-2x-2)\cdot e^{-2x+3}$$
$$=\big[1+(-2x-2)\big]\cdot e^{-2x+3}=(-2x-1)\cdot e^{-2x+3}$$
Ainsi, la réponse correcte est d..

Correction 8

1. De l'information $f(0)=3$, on a :
$$f(0)=3$$
$$(a\times 0^2+b\times 0+c)\cdot e^0+5=3$$
$$c\times 1+5=3$$
$$c=3-5$$
$$c=-2$$
Ainsi, la fonction f admet pour expression :
$f(x)=(a\cdot x^2+b\cdot x-2)\cdot e^x+5$.

2. De l'information $f'(0)=0{,}5$, on a :
$$f'(0)=0{,}5$$
$$\big[a\times 0^2+(2\cdot a+b)\times 0-2+b\big]\cdot e^0=0{,}5$$
$$(-2+b)\times 1=0{,}5$$
$$-2+b=0{,}5$$
$$b=0{,}5+2$$
$$b=2{,}5$$
Ainsi, la fonction f' admet pour expression :
$$f'(x)=\big[a\cdot x^2+(2\cdot a+b)\cdot x-2+b\big]\cdot e^x$$
$$=\big[a\cdot x^2+(2\cdot a+2{,}5)\cdot x-2+2{,}5\big]\cdot e^x$$
$$=\big[a\cdot x^2+(2\cdot a+2{,}5)\cdot x+0{,}5\big]\cdot e^x$$
De l'information $f'(1)=0$, on a :

$$f'(1)=0$$
$$\big[a\times 1^2+\big(2{\cdot}a+2{,}5\big){\cdot}1+0{,}5\big]{\cdot}\mathrm{e}^1=0$$
$$\big(a+2{\cdot}a+2{,}5+0{,}5\big){\cdot}\mathrm{e}^1=0$$
$$\big(3{\cdot}a+3\big){\cdot}\mathrm{e}^1=0$$

Le nombre e^1 est strictement positif : donc non-nul :

$$3{\cdot}a+3=0$$
$$3{\cdot}a=-3$$
$$a=-1$$

La fonction f admet pour expression :
$f(x)=\big(-x^2+2{,}5{\cdot}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^x+5$.

Correction 9

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x+2 \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^{-x+1}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=-\mathrm{e}^{-x+1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)=1{\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}+\big(x+2\big){\cdot}\big(-\mathrm{e}^{-x+1}\big)$$
$$=1{\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}+\big(-x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}=\big(1+-x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$$
$$=\big(-x-1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}=-\big(x+1\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$$

2. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de son facteur $-\big(x+1\big)$. Or, ce facteur admet pour tableau de signes sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-(x+1)$		$+$	0	$-$	

On en déduit le signe de la fonction f' sur $\big[-2\,;4\big]$:

x	-2		-1		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On a les images suivantes par la fonction f :

- $f(-2)=\big(-2+2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-(-2)+1}=0{\cdot}\mathrm{e}^{2+1}=0$
- $f(-1)=\big(-1+2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-(-1)+1}=1{\cdot}\mathrm{e}^{1+1}=\mathrm{e}^2$
- $f(4)=\big(4+2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-4+1}=6{\cdot}\mathrm{e}^{-3}$

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations ci-dessous sur $\big[-2\,;4\big]$:

x	-2		-1		4
Variation de f	0	↗	e^2	↘	$6{\cdot}\mathrm{e}^{-3}$

Correction 10

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x^2-2{\cdot}x+1 \quad ; \quad v(x)=\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=2{\cdot}x-2 \quad ; \quad v'(x)=-2{\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x)$$
$$=\big(2{\cdot}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}+\big(x^2-2{\cdot}x+1\big){\cdot}\big(-2{\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}\big)$$
$$=\big(2{\cdot}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}+\big(-2{\cdot}x^2+4{\cdot}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$$
$$=\Big[\big(2{\cdot}x-2\big)+\big(-2{\cdot}x^2+4{\cdot}x-2\big)\Big]{\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$$
$$=\big(2{\cdot}x-2-2{\cdot}x^2+4{\cdot}x-2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$$
$$=\big(-2{\cdot}x^2+6{\cdot}x-4\big){\cdot}\mathrm{e}^{-2\cdot x+6}$$

2. La fonction exponentielle étant strictement positive, on en déduit que le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de son facteur $-2{\cdot}x^2{+}6{\cdot}x{-}4$. Ce polynôme du second degré admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=6^2-4\times(-2)\times(-4)=36-32=4$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-6-2}{2\times(-2)}=\frac{-8}{-4}=2$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-6+2}{2\times(-2)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le signe de ce polynôme sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-2{\cdot}x^2{+}6{\cdot}x{-}4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, nous obtenons le signe de la fonction f' sur $\big[0{,}7\,;6\big]$:

x	$0{,}7$		1		2		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations *(sans les ordonnées)* de la fonction f :

x	$0{,}7$		1		2		6
Variation de f		↘		↗		↘	

Correction 11

Une video est accessible

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :
$u(x)=\mathrm{e}^x \quad ; \quad v(x)=x+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=\mathrm{e}^x \quad ; \quad v'(x)=1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x)=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}=\frac{\mathrm{e}^x{\cdot}\big(x+1\big)-\mathrm{e}^x\times 1}{\big(x+1\big)^2}$$
$$=\frac{x{\cdot}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{\big(x+1\big)^2}=\frac{x{\cdot}\mathrm{e}^x}{\big(x+1\big)^2}$$

- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :
  $u(x) = 2x+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x$
  qui admettent pour dérivée :
  $u'(x) = 2 \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
  $$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{2\cdot\mathrm{e}^x - (2x+1)\cdot\mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2}$$
  $$= \frac{\big[2-(2x+1)\big]\cdot\mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2} = \frac{2-(2x+1)}{\mathrm{e}^x}$$
  $$= \frac{2-2x-1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1-2x}{\mathrm{e}^x}$$
- L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :
  $u(x) = 3\cdot\mathrm{e}^x+1 \quad ; \quad v(x) = \mathrm{e}^x - 1$
  qui admettent pour dérivée :
  $u'(x) = 3\cdot\mathrm{e}^x \quad ; \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
  $$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{3\cdot\mathrm{e}^x\cdot(\mathrm{e}^x-1) - (3\cdot\mathrm{e}^x+1)\cdot\mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2}$$
  $$= \frac{3\cdot\mathrm{e}^{2x} - 3\cdot\mathrm{e}^x - 3\cdot\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2} = \frac{-4\cdot\mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x-1\big)^2}$$

Correction 12

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
   $u(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad v(x) = x$
   qui admettent pour dérivées :
   $u'(x) = \mathrm{e}^x \quad ; \quad v'(x) = 1$

   La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
   $$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\mathrm{e}^x \times x + \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

2. (a.) On a le tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   (b.) On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
Variation de f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

