$1^{\text{ère}}$ B — SOS maths – Trigonométrie & Produit Scalaire - *Correction* — 2022

Ex 1 : (*) - 3 pts

Soit 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=5$; Calculer les valeurs exactes de $(\vec{u}+\vec{v})^2$, $(\vec{u}-2\vec{v})^2$, $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$, $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

dans tous ces calculs on observe que : $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=4+10+9=23$$

$$(\vec{u}-2\vec{v})^2=\vec{u}^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{v}^2=4-20+36=20$$

$$(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})=2\vec{u}^2+\vec{v}\cdot\vec{u}-6\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}^2=8-25-27=-44$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2=4-10+9=3 \quad \text{donc} \quad \|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{3}$$

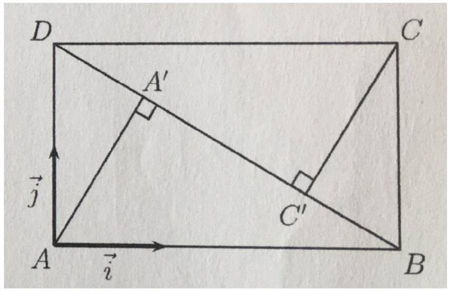
Ex 2 : (**) - 4 pts

On donne la figure ci-contre

$ABCD$ est un rectangle avec

$AB=3$ et $AD=2$;

on se place dans le repère orthonormé $(A,\vec{i},\vec{j})$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=9$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}\cdot(-\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AD}^2=-4$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=9-4=5$$

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}\cdot(-\overrightarrow{AC})=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}-5$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}^2=9$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'C})\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'C}\cdot\overrightarrow{DB}$$

or $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ et $\overrightarrow{CC'}\cdot\overrightarrow{DB}=0$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=A'C'\times DB$

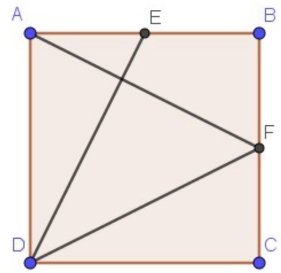
on en déduit que $A'C'\times DB=5$

avec $DB=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

donc $A'C'=\dfrac{5}{\sqrt{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$

Ex 3 : (**) - 4 pts

Soit $ABCD$ un carré de côté 1 ; soit E le milieu de $[AB]$ et F le mileu de $[BC]$



on se place dans le repère orthonormé $(D,\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{DC}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{DA}$

alors $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\1\end{pmatrix}=0{,}5-0{,}5=0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont orthogonaux donc $(AF)\perp(DE)$

on pose $\alpha=\widehat{EDF}$; on a $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}=\begin{pmatrix}0{,}5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0{,}5\end{pmatrix}=0{,}5+0{,}5=1$

or $DE=\sqrt{0{,}5^2+1^2}=\sqrt{1{,}25}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ de même $DF=\sqrt{1^2+0{,}5^2}=\sqrt{1{,}25}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

de plus on sait que $\cos(\alpha)=\dfrac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}}{DE\times DF}$ donc $\cos(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{1{,}25\times1{,}25}}=0{,}8$

d'où $\alpha\simeq36{,}87\,°$

Ex 4 : (**) - 3 pts

On donne $\cos(\alpha)=-0{,}6$ avec $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

1) Calculer la valeur excate de $\sin(\alpha)$ puis la valeur approchée de α
2) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi-\alpha)$, $\sin(\dfrac{\pi}{2}+\alpha)$, $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sin(\pi-\alpha)$, $\sin(\pi+\alpha)$

on sait que $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$

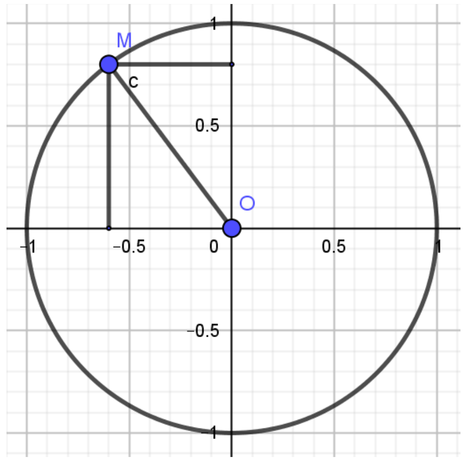
donc $\sin^2(\alpha)+0{,}36=1$

donc $\sin^2(\alpha)=0{,}64$

donc $\sin(\alpha)=0{,}8$ ou $\sin(\alpha)=-0{,}8$

or $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ donc $\cos(\alpha)<0$ et $\sin(\alpha)>0$ donc $\sin(\alpha)=0{,}8$

on en déduit que : $\alpha\simeq2{,}21\,rad$



avec les propriétés angulaires de symétrie et de déphasage on obtient :

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos(\alpha)=0,6$; $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos(\alpha)=-0,6$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin(\alpha)=0,8$; $\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)=-0,8$

$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{0,8}{-0,6}=\frac{-4}{3}$; $\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)=0,8$

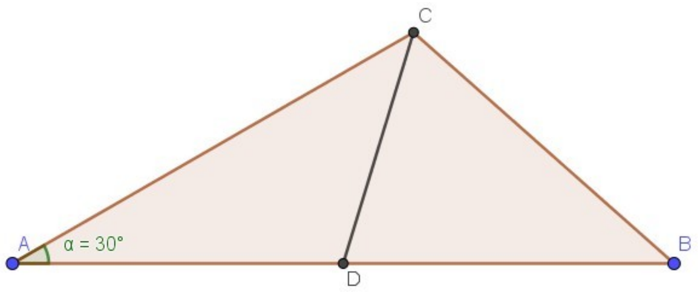
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin(\alpha)=-0,8$

Ex 5 : (**) - 2 pts

On donne la figure avec :

$AB=10, AC=7$, D milieu de $[AB]$

et $\alpha=\widehat{CAB}=30°$



Calculer BC , $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ puis CD

BONUS : Déterminer l'aire exacte du triangle ABC

on applique le théorème d'Al-Kashi :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\hat{A})$

donc $BC^2=AC^2+AB^2-2\times AC\times AB\times\cos(\hat{A})$

donc $BC^2=49+100-140\cos(30°)=149-70\sqrt{3}\simeq 27,76$

donc $BC\simeq 5,27$

on applique le théorème d'Al-Kashi :

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\hat{B})$ donc $\cos(\hat{B})=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

donc $\cos(\hat{B})=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\times BC\times AB}$ soit $\cos(\hat{B})\simeq 0,747$ donc $\widehat{CBA}\simeq 41,64°$

on déduit alors que $\widehat{ACB}=180°-30°-41,64°\simeq 118,36°$

on applique le théorème de la médiane : $CA^2+CB^2=2CD^2+\frac{AB^2}{2}$

donc $CD^2=\frac{2AC^2+2BC^2-AB^2}{4}$ donc $CD^2\simeq 13,38$ donc $CD\simeq 3,66$

<u>BONUS</u> : calcul de l'aire du triangle ABC

<u>Méthode n°1</u> : Formule de Héron d'Alexandrie

$Aire_{ABC}=\sqrt{p\times(p-a)\times(p-b)\times(p-c)}$

où $a=BC, b=AC, c=AB$ et $p=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)$

on obtient $Aire_{ABC}\simeq 17,5$

<u>Méthode n°2</u> : Formule du déterminant

$Aire_{ABC}=\frac{1}{2}\times det(\vec{AB},\vec{AC})=0,5\times AB\times AC\times\cos(\hat{A})=17,5$