Correction 1

Une video est accessible

1. L'expression de chacune de ces fonctions est donnée sous la forme d'un produit $u{\cdot}v$. Compléter le tableau ci-dessous afin d'identifier les deux facteurs de ce produit et leur dérivée respective.

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2{+}3x$	$2{\cdot}x+2$	$6{\cdot}x+3$	2
$2{\cdot}x^2{+}1$	$\sqrt{x}$	$4x$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$	$3-x^2$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$-2x$
$\dfrac{2}{x}$	$\sqrt{x}$	$-\dfrac{2}{x^2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. a. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) \\ &= (6{\cdot}x+3)(2{\cdot}x+2)+(3{\cdot}x^2+3{\cdot}x)\times 2 \\ &= 12{\cdot}x^2+12{\cdot}x+6{\cdot}x+6+6{\cdot}x^2+6{\cdot}x \\ &= 18{\cdot}x^2+24{\cdot}x+6 \end{aligned}$$

b. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) \\ &= 4{\cdot}x\sqrt{x}+(2{\cdot}x^2+1){\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}} \\ &= \frac{4{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{2{\cdot}x^2+1}{2{\cdot}\sqrt{x}} \\ &= \frac{8{\cdot}x^2+(2{\cdot}x^2+1)}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{10{\cdot}x^2+1}{2{\cdot}\sqrt{x}} \end{aligned}$$

c. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) \\ &= -\frac{1}{x^2}{\cdot}(3-x^2)+\frac{1}{x}{\cdot}(-2x) = \frac{-(3-x^2)}{x^2}-2 \\ &= \frac{-3+x^2}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2} = \frac{-3+x^2-2{\cdot}x^2}{x^2} = \frac{-x^2-3}{x^2} \end{aligned}$$

d. Avec les identifications faites à la question précédente et la formule de dérivation d'un produit, on obtient l'expression de la fonction dérivée f' :

$$\begin{aligned} j'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) \\ &= -\frac{2}{x^2}{\cdot}\sqrt{x}+\frac{2}{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x\sqrt{x}} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{x^2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{x}{x^2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-2{\cdot}x+x}{x^2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{-x}{x^2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{-1}{x{\cdot}\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Correction 2

1. Compléter le tableau suivant :

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$
$3{\cdot}x^2-2$	$8-x$	$6{\cdot}x$	-1
$\dfrac{1}{x}$	x^2-1	$-\dfrac{1}{x^2}$	$2x$
$5{\cdot}x+\dfrac{2}{x}$	$3-2{\cdot}x^3$	$5-\dfrac{2}{x^2}$	$-6{\cdot}x^2$
x	$\sqrt{x}$	1	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. a. La fonction f s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x){\cdot}v(x){+}u(x){\cdot}v'(x) = 6{\cdot}x{\cdot}(8{-}x)+(3{\cdot}x^2{-}2){\cdot}(-1) \\ &= 48{\cdot}x-6{\cdot}x^2-3{\cdot}x^2+2 = -9{\cdot}x^2+48{\cdot}x+2 \end{aligned}$$

b. La fonction g s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) \\ &= -\frac{1}{x^2}{\cdot}(x^2-1)+\frac{1}{x}{\cdot}2x = \frac{-(x^2-1)}{x^2}+2 \\ &= \frac{-x^2+1+2{\cdot}x^2}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2} \end{aligned}$$

c. La fonction h s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) \\ &= \Big(5-\frac{2}{x^2}\Big)(3-2x^3)+\Big(5x+\frac{2}{x}\Big)(-6x^2) \\ &= 15-10x^3-\frac{6}{x^2}+4x-30x^3-12x \\ &= -40x^3-8x+15-\frac{6}{x^2} \end{aligned}$$

d. La fonction j s'écrivant comme le produit de deux facteurs, sa fonction dérivée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} j'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\sqrt{x}+x{\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x}+\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{2{\cdot}\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2{\cdot}\sqrt{x}}+\frac{x}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{2{\cdot}x+x}{2{\cdot}\sqrt{x}} \\ &= \frac{3{\cdot}x}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{3{\cdot}\sqrt{x}{\cdot}\sqrt{x}}{2{\cdot}\sqrt{x}} = \frac{3{\cdot}\sqrt{x}}{2} \end{aligned}$$

Correction 3

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v dont les expressions sont :

$u(x)=x^2-3{\cdot}x+1$; $v(x)=1-2x$

qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :

$u'(x)=2{\cdot}x-3$; $v'(x)=-2$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x){\cdot}v(x)+u(x){\cdot}v'(x) \\ &= (2x-3){\cdot}(1-2{\cdot}x)+(x^2-3{\cdot}x+1){\cdot}(-2) \\ &= 2{\cdot}x-4{\cdot}x^2-3+6{\cdot}x-2{\cdot}x^2+6{\cdot}x-2 \\ &= -6{\cdot}x^2+14{\cdot}x-5 \end{aligned}$$

2. L'expression de la fonction g est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v dont les expressions sont :

$u(x) = -x^3 + 2{\cdot}x + 3 \quad ; \quad v(x) = x^2 + 1$

qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :

$u'(x) = -3{\cdot}x^2 + 2 \quad ; \quad v'(x) = 2{\cdot}x$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) \\ &= (-3{\cdot}x^2 + 2)(x^2 + 1) + (-x^3 + 2{\cdot}x + 3){\cdot}2x \\ &= -3{\cdot}x^4 - 3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x^2 + 2 - 2{\cdot}x^4 + 4{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x \\ &= -5{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^2 + 6{\cdot}x + 2 \end{aligned}$$

3. L'expression de la fonction h est donnée sous la forme d'un produit de deux facteurs u et v dont les expressions sont :

$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = x + \dfrac{1}{x}$

qui admettent les deux fonctions dérivées suivantes :

$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction h' dérivée de la fonction h :

$$h'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\Big(x + \frac{1}{x}\Big) + x{\cdot}\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)$$

$$= x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2{\cdot}x$$

Correction 4

1. Compléter le tableau suivant :

u	v	u'	v'
$5{\cdot}x + 2$	$3{\cdot}x - 2$	5	3
$x^2 - 3$	$x + 1$	$2{\cdot}x$	1
$x^2 + x + 1$	$2{\cdot}x^2 - 1$	$2{\cdot}x + 1$	$4{\cdot}x$
4	$x^2 - 2{\cdot}x + 3$	0	$2{\cdot}x - 2$

2.
- L'expression de la dérivée f' est donnée par la formule :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{5{\cdot}(3{\cdot}x - 2) - (5{\cdot}x + 2){\cdot}3}{(3{\cdot}x - 2)^2}$$

$$= \frac{15{\cdot}x - 10 - 15{\cdot}x - 6}{(3{\cdot}x - 2)^2} = \frac{-16}{(3{\cdot}x - 2)^2}$$

- L'expression de la dérivée f' est donnée par la formule :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{2x{\cdot}(x + 1) - (x^2 - 3){\cdot}1}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{2{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x - x^2 + 3}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2{\cdot}x + 3}{(x + 1)^2}$$

- L'expression de la dérivée f' est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} \\ &= \frac{(2{\cdot}x + 1){\cdot}(2{\cdot}x^2 - 1) - (x^2 + x + 1){\cdot}4{\cdot}x}{(2x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{4{\cdot}x^3 - 2{\cdot}x + 2{\cdot}x^2 - 1 - 4{\cdot}x^3 - 4{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x}{(2{\cdot}x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{-2{\cdot}x^2 - 6{\cdot}x - 1}{(2{\cdot}x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Correction 5

- La fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

  $u(x) = \sqrt{x} \quad ; \quad v(x) = x + 1$

  qui admettent pour dérivée les expressions :

  $u'(x) = \dfrac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}} \quad ; \quad v'(x) = 1$

  La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}{\cdot}(x + 1) - \sqrt{x}\times 1}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{x + 1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(x + 1)^2} = \frac{\dfrac{x + 1 - 2{\cdot}x}{2\sqrt{x}}}{(x + 1)^2} = \frac{\dfrac{-x + 1}{2\sqrt{x}}}{(x + 1)^2}$$

$$= \frac{-x + 1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{-x + 1}{2\sqrt{x}{\cdot}(x + 1)^2}$$

- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. Son expression est donnée sous la forme du produit des deux fonctions u et v définie par :

  $u(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad v(x) = \sqrt{x}$

  qui admettent pour dérivée :

  $u'(x) = 2{\cdot}x \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

  La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction g :

  $g'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x)$

$$= 2{\cdot}x\times\sqrt{x} + \big(x^2 - 3\big)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2{\cdot}x\sqrt{x} + \frac{x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2{\cdot}x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2 - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{4{\cdot}x\times x}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4{\cdot}x^2 + x^2 - 3}{2\sqrt{x}} = \frac{5{\cdot}x^2 - 3}{2\sqrt{x}}$$