$1^{ère}$ B — SOS maths – La Dérivation – Etude de fonctions - Corrigé — 17 déc 2021

1. $f(x) = \sqrt{x} + x^3 + x$ sur $I =]\,0; +\infty[$.
   $f\,'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3x^2 + 1$.
   $f\,'$ est une somme de termes.
   Les termes $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $3x^2$ sont positifs, le terme 1 est strictement positif.
   Donc $f\,'$ est strictement positive sur $I =]\,0; +\infty[$.
   D'où le tableau de variation de f sur I.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	

2. $f(x) = -5x^2 + x + 3$ sur $I = \mathrm{R}$.
   $f\,'(x) = -5 \times 2x + 1 + 0 = -10x + 1$.
   $f\,'$ est une fonction affine de coefficient -10 strictement négatif.
   On note que: $-10x + 1 = 0 \Leftrightarrow -10x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-10} = 0,1$.
   D'où le tableau de variation de f sur I.

x	$-\infty$		$0,1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3,05$	$\searrow$	

3. $f(x) = 8x^2 - x + 9$ sur $I = \left[0; \frac{1}{16}\right]$.
   $f\,'(x) = 8 \times 2x - 1 + 0 = 16x - 1$.
   $f\,'$ est une fonction affine de coefficient 16 strictement positif.
   On note que: $16x - 1 = 0 \Leftrightarrow 16x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$.
   D'où le tableau de variation de f sur I.

x	0		$1/16$
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	9	$\searrow$	$8,96875$

4. $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2$ sur $I = \mathrm{R}$.

$f'(x) = -3x^2 + \frac{3}{2}2x = -3x^2 + 3x = -3x(x-1)$.

f' est un produit de 2 facteurs, chacun d'eux étant une fonction affine (voire linéaire pour le premier).

$-3x$ a pour coefficient -3 strictement négatif.

$x - 1$ a pour coefficient 1 strictement positif.

On note que: $-3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{-3} = 0$.

On note que: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

D'où le tableau de variation de f sur I.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$0,5$	$\searrow$	

5. $f(x) = -2x^3 - 0,5x^2 + x + 3$ sur R.

$f'(x) = -2 \times 3x^2 - 0,5 \times 2x + 1 = -6x^2 - x + 1$.

f' est un trinôme avec $a = -6$, $b = -1$ et $c = 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$.

$\Delta > 0$. Le trinôme a 2 racines $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{-12} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{-12} = -0,5$.

$a<0$. D'où le tableau suivant:

x	$-\infty$		-0.5		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$2,625$	$\nearrow$	$f(1/3) \approx 3,204$	$\searrow$	

6. $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ sur $I = [-1; -0,5[$.

On pose $f = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2$ et $v = 2x + 1$.

D'où $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = 2x$ et $v' = 2$.

Soit $f'(x) = \frac{2x \times (2x+1) - x^2 \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2} = \frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}$.

Le numérateur est un produit de 2 facteurs, chacun d'eux étant une fonction affine (voire linéaire pour le premier).

$2x$ a pour coefficient 2 strictement positif.

$x + 1$ a pour coefficient 1 strictement positif.

On note que: $2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} = 0$.

On note que: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Le dénominateur est un carré strictement positif pour $x \neq -0,5$.

D'où le tableau de variation de f sur I.

x	-1		$-0,5$
$2x$		$-$	
$x+1$	0	$+$	
$(2x+1)^2$		$+$	0
$f'(x)$		$-$	||
$f(x)$	-1	↘	||