1ère B SOS maths – Dérivation – 2nd degré – Suites - *Correction* 2022

Ex 1 : Second degré

Équations **(4 points)**

1) $3x^2 - 7x - 6 = 0$, on a : $\Delta = 49 + 72 = 121 = 11^2$.

$\Delta > 0$, deux racines : $x_1 = \dfrac{7+11}{6} = 3$ et $x_2 = \dfrac{7-11}{6} = -\dfrac{2}{3}$.

$S = \left\{-\dfrac{2}{3}\ ;\ 3\right\}$

2) $\dfrac{-3}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{x-1} - \dfrac{1}{2} = 0$, $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$x \in D_f$, on multiplie par $2(x-1)^2$

$-6 + 10(x-1) - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow -6 + 10x - 10 - x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$-x^2 + 12x - 17 = 0$

$\Delta = 144 - 68 = 76 = (2\sqrt{19})^2$, $\Delta > 0$ deux racines :

$x_1 = \dfrac{-12 + 2\sqrt{19}}{-2} = 6 - \sqrt{19} \in D_f$ ou $x_2 = 6 + \sqrt{19} \in D_f$ $S = \left\{6 - \sqrt{19}\ ;\ 6 + \sqrt{19}\right\}$

3) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$ on pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$

L'équation devient alors : $X^2 - 12X + 27 = 0$, on a $\Delta = 144 - 108 = 36 = 6^2$.

$\Delta > 0$, deux racines : $X_1 = \dfrac{12+6}{2} = 9$ et $X_2 = \dfrac{12-6}{2} = 3$.

On revient à x : $x^2 = 9$ ou $x^2 = 3$

$x = 3$ ou $x = -3$; $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$S = \left\{-3\ ;-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 3\right\}$

Ex 2 : Fonction rationnelle & dérivation

Étude d'une fonction **(5 points)**

1) $D_f = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2 \geqslant 2 > 0$ (ne s'annule pas).

2) $f'(x) = \dfrac{8(x^2+2) - 2x(8x+4)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8x^2 + 16 - 16x^2 - 8x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-8x^2 - 8x + 16}{(x^2+2)^2} = \dfrac{8(-x^2 - x + 2)}{(x^2+2)^2}$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 2 = 0$ d'où $x_1 = 1$ racine évidente, $P = -2$ donc $x_2 = -2$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	4	↘	0

$f(-2) = \dfrac{-16+4}{4+2} = \dfrac{-12}{6} = -2$

$f(1) = \dfrac{8+4}{1+2} = \dfrac{12}{3} = 4$

4) Quand x devient "très grand" alors $8x+4 \approx 8x$ et $x^2+2 \approx x^2$ donc $f(x) \approx \dfrac{8x}{x^2} \approx \dfrac{8}{x}$.

Comme 8 sur "très grand" devient "très petit" alors $f(x)$ tend vers 0.

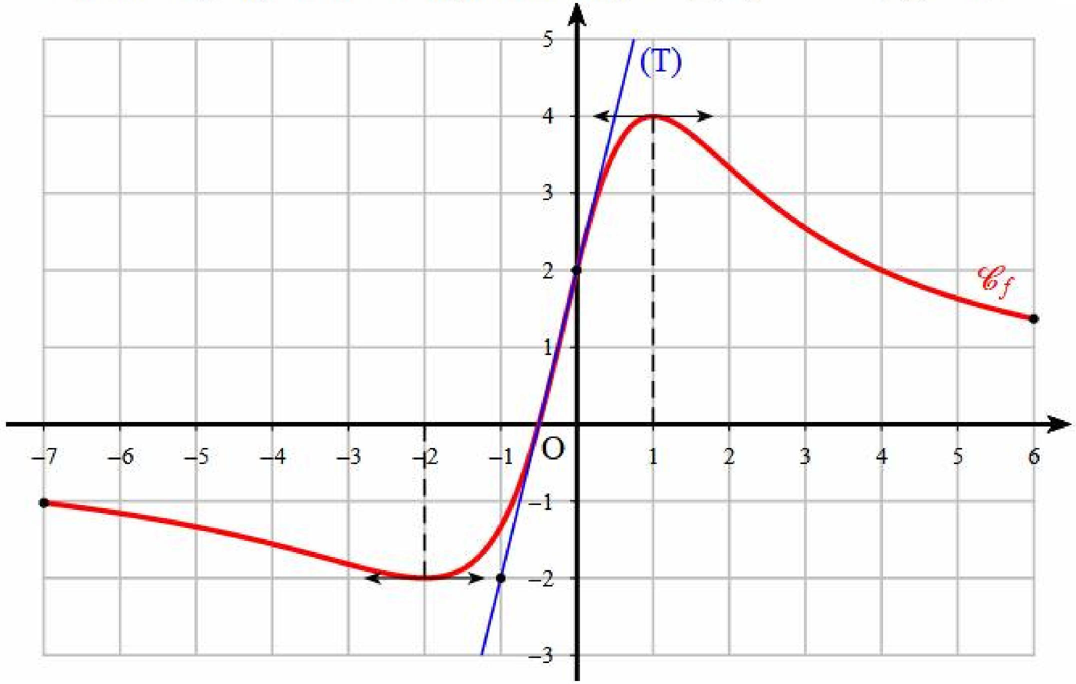
5) La tangente (T) en 0 a comme équation : $y = f'(0)x + f(0)$

$f(0) = 2$ et $f'(0) = \dfrac{16}{4} = 4$ donc (T) : $y = 4x + 2$.

6) D'après le tableau de variation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

7) Pour tracer (T), on peut prendre les points $(-1\ ;-2)$ et $(0\ ;\ 2)$.

Pour tracer $\mathscr{C}_f$, on peut calculer en plus deux images : $f(-7) \approx -1$ et $f(6) \approx 1,4$



<u>Rque</u> : la Courbe admet un point d'inflexion aux alentours de *x=0*

Ex 3 : Suites numériques

Limite d'une suite (5 points)

1) a) $u_1 = 0,6u_0 + 400 = 0,6 \times 800 + 400 = 880,$
$u_2 = 0,6u_1 + 400 = 0,6 \times 880 + 400 = 928,$
$u_3 = 0,6u_2 + 400 = 0,6 \times 928 + 400 = 956,8.$

b) La suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique car ni la différence, ni le rapport de deux termes consécutifs sont constant. En effet :
- $u_1 - u_0 = 880 - 800 = 80$ et $u_2 - u_1 = 928 - 880 = 48$ donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$
- $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{880}{800} = \dfrac{11}{10}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{928}{880} = \dfrac{58}{55}$ donc $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000 = 0,6u_n + 400 - 1000 = 0,6u_n - 600 = 0,6(u_n - 1000) = 0,6v_n.$
$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0,6,$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = -200.$

b) On en déduit alors $v_n = v_0\, q^n = -200 \times (0,6)^n$
et par suite $u_n = v_n + 1000 = 1000 - 200 \times (0,6)^n$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,6)^n = 0$ car $-1 < 0,6 < 1$. Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1000$

Compléments : algorithmes

Algorithme (2 points)

On donne l'algorithme ci-contre.

1) Que calcule cet algorithme ?

2) Rentrer cet algorithme dans votre calculette. Recopier puis compléter le tableau suivant :

Variables : N, I et S entiers
Entrées et initialisation
Lire N
$0 \to S$
Traitement
pour I variant de 1 à N **faire**
$S + I^2 \to S$
fin
Sorties : Afficher S

N	2	5	10	20	50
S					

Algorithme (2 points)

1) Cet algorithme calcule la somme S des carrés : $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

2) On obtient le tableau suivant :

N	2	5	10	20	50
S	5	55	385	2 870	42 925

Rebonds d'une balle (4 points)

Lucas lâche une balle d'une hauteur de 24 m. On estime que, lorsque la balle rebondit, la hauteur de son rebond perd 10 % par rapport au précédent rebond. On considère que la balle ne rebondit plus lorsque la hauteur du rebond est inférieur à 1 cm.

On appelle h_n la hauteur de rebond de la balle après le n-ième rebond. On pose $h_0 = 24$.

1) Justifier que la suite (h_n) est une suite géométrique dont précisera la raison q.

2) On voudrait déterminer le nombre de rebonds qu'effectue la balle de Lucas. Pour cela, on a écrit un algorithme incomplet pour connaître le nombre de rebonds :

Variables : N : entier et H réel
Entrées et initialisation
$\cdots \to N$
$\cdots \to H$
Traitement
tant que $H \ldots\ldots$ **faire**
$\cdots \to N$
$\cdots \to H$
fin
Sorties : Afficher ...

1) Comme la balle, à chaque rebond, perd 10 % de sa hauteur, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad h_{n+1} = h_n - 0,1h_n = 0,9h_n$$

La suite (h_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,9.$

2) La balle rebondit tant que sa hauteur est supérieure ou égal à 1 cm soit 0,01 m

Variables : N : entier et H réel
Entrées et initialisation
$0 \to N$
$24 \to H$
Traitement
tant que $H \geqslant 0,01$ **faire**
$N + 1 \to N$
$0,9H \to H$
fin
Sorties : Afficher N