1ère B — Prépa DS n°4 – Dérivation & Suites - *Correction* — janv 2022

Ex 1 : Suite arithmétique

Les questions suivantes sont indépendantes.

On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r définie sur $\mathbb{N}$.

On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

1) $u_{39} = u_7 + (39-7)r = u_7 + 32r \iff r = \dfrac{u_{39}-u_7}{32} = \dfrac{15-111}{32} = -3$

$u_7 = u_0 + 7r \iff u_0 = u_7 - 7r = 111 + 7\times 3 = 132$

$u_{68} = u_0 + 68r = 132 - 3\times 68 = -72$

2) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0+u_n}{2}\right)$.

$u_n = u_0 + nr \iff u_0 = u_n - nr = 10 - 2n$

En remplaçant dans l'expression de S_n, on a :

$S_n = -26 \iff (n+1)\left(\dfrac{10-2n+10}{2}\right) = -26 \iff (n+1)(10-n) = -26 \iff$

$(n+1)(n-10) = 26 \iff n^2 - 10n + n - 10 - 26 = 0 \iff n^2 - 9n - 36 = 0$

$\Delta = 81 + 144 = 225 = 15^2$, la racine positive est : $n = \dfrac{9+15}{2} = 12$

$u_{12} = u_0 + 12r \iff u_0 = u_{12} - 12r = 10 - 24 = -14$

Ex 2 : Suite géométrique

1) $u_5 = u_3 q^2 \iff q^2 = \dfrac{32}{162} = \dfrac{16}{81}$ Comme $q > 0$, on a : $q = \sqrt{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{4}{9}$

$u_3 = u_0 q^3 \iff u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{162}{\left(\dfrac{4}{9}\right)^3} = 162 \times \dfrac{9^3}{4^3} = \dfrac{59\ 049}{32}$

2) $u_{10} = u_6 q^4 \iff q^4 = \dfrac{u_{10}}{u_6} = \dfrac{5103}{63} = 81 = 3^4$ Comme $q > 0$, on a : $q = 3$

$u_6 = u_0 q^6 \iff u_0 = \dfrac{u_6}{q^6} = \dfrac{63}{3^6} = \dfrac{7}{81}$ $u_{13} = u_{10} q^3 = 5\ 103 \times 3^3 = 137\ 781$

Ex 3 : Suite arithmético-géométrique

1) a) $u_1 = \dfrac{1}{3}\times(-3) + 4 = -1 + 4 = 3$

$u_2 = \dfrac{1}{3}\times 3 + 4 = 1 + 4 = 5$ et $u_3 = \dfrac{1}{3}\times 5 + 4 = \dfrac{5+12}{3} = \dfrac{17}{3}$

b) La suite (u_n) n'est pas géométrique car : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{3}{-3} = -1$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{3}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \dfrac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \dfrac{1}{3}u_n - 2 = \dfrac{u_n - 6}{3} = \dfrac{1}{3}v_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{3}$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 6 = -9$

b) $v_n = v_0 q^n = -9\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ d'où $u_n = v_n + 6 = -9\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$.

Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$

Ex 4 : Étude de fonction rationnelle & dérivation

1) $f'(x) = 1 - \dfrac{2\times 2}{(2x-3)^2} = \dfrac{(2x-3)^2 - 4}{(2x-3)^2} = \dfrac{(2x-3-2)(2x-3+2)}{(2x-5)^2} = \dfrac{(2x-5)(2x-1)}{(2x-3)^2}$

2) $f'(x) = 0 \iff 2x - 5 = 0$ ou $2x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$, $(2x-3)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ = le signe $(2x-5)(2x-1)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$		$0,5$		$1,5$		$2,5$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-1,5$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$2,5$	$\nearrow$	$+\infty$

Ex 5 : Suite arithmétique & degré 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 9$.
Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. On voudrait déterminer n pour que $S_n = 5\,559$.

1) Déterminer u_n en fonction de n.
2) Montrer que $S_n = 5\,559$ est équivalent à $2n^2 + 11n - 5\,550 = 0$
3) Déterminer la valeur de n.
4) Écrire un programme permettant de vérifier la valeur de n trouvé.

Ex 6 : Limite de suites – VRAI-FAUX

Limite d'une suite : Vrai-Faux **(2 points)**

Affirmation 1 Vraie : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

Affirmation 2 Fausse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{4}{3} > 1$ par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Affirmation 3 Vraie : $[(-3)^n]$ n'admet pas de limite car $-3 \leqslant -1$.

(w_n) n'a pas de limite. La suite (w_n) diverge.

Ex 7 : Étude de fonction polynôme & dérivation

1) f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$

2) • $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 + 6x + 2 = 0$. On a $\Delta = 36 - 24 = 12 = (2\sqrt{3})^2$

   $x_1 = \dfrac{-6 + 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-3 + \sqrt{3}}{2} \approx -0,42$ et $x_2 = \dfrac{-6 - 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{3} \approx -1,58$

   • Le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $3x^2 + 6x + 2$

Un calcul exacte donne pour $f(x_1) = 1 - \dfrac{2}{9}\sqrt{3} \approx 0,61$ et $f(x_2) = 1 + \dfrac{2}{9}\sqrt{3} \approx 1,38$

x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	≈ 1.38	$\searrow$	≈ 0.61	$\nearrow$	$+\infty$

3) On développe :
   $(x+2)^2(x-1) = ((x^2+4x+4)(x-1) = x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4 = x^3 + 3x^2 - 4$

4) $T : y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

   $f'(-2) = 12 - 12 + 2 = 2$ et $f(-2) = -8 + 12 - 4 + 1 = 1$.

   On a donc : $T : y = 2(x+2) + 1 \;\Leftrightarrow\; y = 2x + 5$

5) $2x_S + 5 = 2(-4) + 5 = -3 = y_S$. S appartient donc à T.

6) La position relative entre $\mathscr{C}_f$ et T est donnée par le signe de $g(x) = f(x) - (2x+5)$

   $g(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

- Si $x \in [-3\,;-2[\cup]-2\,;\,0]$, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de T.
- Si $x = -2$, $\mathscr{C}_f$ et T sont confondues.